Università degli Studi di Napoli Federico II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Dipartimenti

Biologia

Fisica «E. Pancini»

Matematica «R. Caccioppoli»

Scienze Chimiche

Scienze della Terra, dell'ambiente e delle risorse

Piano Lauree Scientifiche

Scuola Estiva PLS di Formazione Docenti, NAPOLI, 16 luglio 2018

Argomentare e dimostrare: riflessioni epistemologiche, cognitive e didattiche

Samuele Antonini

Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia

Perché educare all’argomentazione?

….tanti motivi:

- Socio-culturale: cittadinanza, crescita personale e professionale….
- Istituzionale (Indicazioni Nazionali)
- Epistemologico (centrale nel pensiero matematico)
- Cognitivo (mezzo di apprendimento)

Perché **non** educare all’argomentazione?

Argomentazioni… e argomentazioni

Perché la somma di due numeri naturali dispari è pari?
Perché 0 è pari?
Perché una funzione continua può essere non derivabile?

Argomentazioni… e argomentazioni

Perché 3^2 = 9?
Perché 3^0 =1?
Perché nel calcolo devo usare le parentesi? E perché in quel particolare modo?
Perché a volte chiamiamo «doppia» una soluzione di un’equazione?
Perché per due punti distinti passa sempre una retta?

La dimostrazione matematica: una particolare argomentazione

argomentazione	dimostrazione
argomentare	dimostrare

La dimostrazione: necrologi anni ‘90

Uso di dimostrazioni assistite dai calcolatori

Estrema complessità delle dimostrazioni dei teoremi più significativi

Secondo alcuni matematici:
perdita del ruolo centrale
della dimostrazione rigorosa

John Horgan (*Morte della dimostrazione*, Le Scienze, 1993) TEORIZZA la morte della dimostrazione in un futuro ormai prossimo

La dimostrazione: necrologi anni ‘90

Uso di dimostrazioni assistite dai calcolatori

Estrema complessità delle dimostrazioni dei teoremi più significativi

Secondo alcuni matematici:
perdita del ruolo centrale
della dimostrazione rigorosa

Ci si può chiedere se la dimostrazione dell’ultimo teorema di Fermat non sia stato l’estremo sussulto di una cultura morente…

John Horgan (*Morte della dimostrazione*, Le Scienze, 1993) TEORIZZA la morte della dimostrazione in un futuro ormai prossimo

La dimostrazione: necrologi anni ‘90

Uso di dimostrazioni assistite dai calcolatori

Estrema complessità delle dimostrazioni dei teoremi più significativi

Anche nell’insegnamento la dimostrazione potrebbe non essere così fondamentale…

ò chiedere se la
zione dell’ultimo
di Fermat non
l’estremo
di una cultura
…

Secondo alcuni
perdita del ruolo
della dimostrazi

John Horgan (*Mo*… e Scienze, 1993) TEORIZZA la morte della dimostrazione in un futuro ormai prossimo

La resurrezione della dimostrazione

Voci di matematici (Thurston, Lolli, ….) che hanno portato la dimostrazione al centro… forse più di prima

La resurrezione della dimostrazione

Lolli (Morte e Resurrezione della dimostrazione, Le Scienze, 1997)

Fare matematica e fare dimostrazione sono dunque la stessa cosa. Ciò non vuol dire che debbano essere un tormentone. C'è chi sostiene che, essendo la loro funzione quella di stabilire il legame di conseguenza logica dagli assiomi, esse vadano commisurate solo su questa funzione globale, e che non importa se si fanno (anzi si devono fare) dimostrazioni complicate per fatti ovvi; le ragioni dell'organizzazione logica della teoria prevalgono su tutto.

La resurrezione della dimostrazione

Ma così si trascurano altre funzioni della dimostrazione, che sono il motivo per cui si continua a cercare di perfezionarle, di semplificarle, di trovarne di nuove; tra queste c'è quella di far capire, senza risalire ai principi, la ragione del sussistere del teorema , di mostrare, nel mentre si dimostra, di essere a un tempo strumento di comunicazione e di convinzione

Funzioni della dimostrazione (Hanna, 1989)

Dimostrazioni che (soltanto) dimostrano (validano)

Mostrano **che** un teorema è vero

Dimostrazioni che (anche) spiegano

Mostrano **perché** un teorema è vero

Funzioni della dimostrazione (De Villers, 1990)

validare

convincere

spiegare

sistematizzare (organizzare in un sistema teorico)

scoprire (o inventare, nuovi risultati)

comunicare (conoscenza matematica)

Funzioni della dimostrazione (De Villers, 1990)

validare

convincere

spiegare

sistematizzare (organizzare in un sistema teorico)

scoprire (o inventare, nuovi risultati)

comunicare (conoscenza matematica)

Si producono dimostrazioni (argomentazioni) con obiettivi diversi

Le funzioni della dimostrazione (Lolli, QED, 2005)

1. Evitare i calcoli
2. Predire i risultati
3. Controllare lo strumento
4. Aumentare l’affidabilità
5. Fornire spiegazioni
6. Fare economia
7. Spiegare mediante riconduzione agli assiomi
8. Suggerire generalizzazioni
9. Spiegare mediante generalità
10. Trasportare risultati
11. Stabilire collegamenti
12. Spiegare mediante sussunzione
13. Fare due passi invece di infiniti
14. Definire la semantica
15. Provare la correttezza
16. Spiegare mediante la semantica
17. Risolvere problemi
18. Esplicitare il contenuto costruttivo
19. Estrarre algoritmi
20. Fare umorismo
21. Semplificare la vita
22. Risparmiare risorse
23. Sprecare risorse
24. Creare concetti
25. Inventare forme di ragionamento
26. Resuscitare
27. Spiegare «perché non»
28. Refutare
29. Scoprire controesempi
30. Suggerire teoremi
31. Suggerire assiomi
32. Suggerire le ipotesi giuste
33. Vedere i risultati
34. Sostituire l’intuizione
35. Permettere l’intuizione
36. Vedere quel che non c’è
37. Raffinare l’intuizione
38. Confermare l’intuizione
39. Definire l’intuizione

Importante da un punto di vista storico-epistemologico

L’insegnamento della logica non ha mostrato significativi miglioramenti nella comprensione della necessità di una dimostrazione (Fischebin)

Perché si dimostra in matematica?

Difficoltà degli studenti a comprendere l’utilità, l’obiettivo delle dimostrazioni

Fondamentale una appropriata comprensione (**differenziazione-> argomentazioni diverse**) delle funzioni della dimostrazione da parte degli studenti (De Villers, Hanna,….)

L'insegnamento della logica non ha mostrato significativi miglioramenti nella comprensione della necessità di una dimostrazione (Fischebin)

Perché si dimostra in matematica?

Quali funzioni deve avere una dimostrazione per essere una attività significativa in classe?

Difficoltà degli studenti a comprendere l'utilità, l'obiettivo delle dimostrazioni

Attenzione ai messaggi impliciti

Questionario di Healy-Hoyles somministrato nel pavese

CAMPIONE

80 studenti:

- 65 di licei scientifici
- 15 di una classe liceo linguistico

STRUMENTO

2 questionari (ambito algebrico e ambito geometrico)

QUESTIONARIO (Algebra)

1^ PARTE

Dimostrare la seguente affermazione:

“La somma di due numeri dispari è un numero pari”.

2^ PARTE

Ad alcuni studenti è stata assegnata la stessa dimostrazione.
Le varie risposte ottenute sono riportate di seguito.

A)
Un numero dispari è il consecutivo di un numero pari, quindi la somma di due dispari è data dalla somma di due pari con il numero 2.
Quindi siccome la somma di due numeri pari è un numero pari e l’aggiunta di 2 dà ancora un pari possiamo affermare che la somma di due dispari è un pari.

B)

3+5 = 8
7+9 = 16
11+13 = 24
25+45 = 70
31+43 = 74
allora l’affermazione è vera.

QUESTIONARIO (Algebra)

C)

primo numero dispari = 2n+1
secondo numero dispari = 2m+1

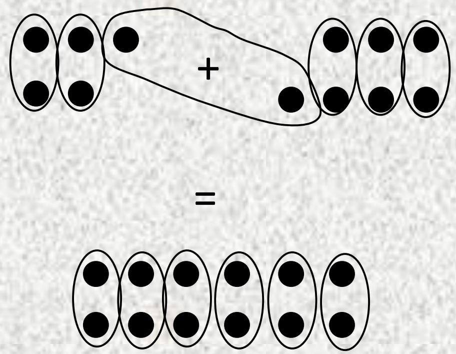
(2n+1)+(2m+1) = 2 (n+m) + 2 =
= 2 (n+m+1)

quindi, essendo il doppio del numero n+m+1, è un numero pari.

E)

x = intero dispari
y = intero dispari
z = x-1
w = y-1
x + z = y + w = 2x-1+1 = 2x = 2y
quindi è un numero pari.

D)



QUESTIONARIO (Algebra)

Dopo aver analizzato le varie soluzioni rispondi alle seguenti domande:

- Quale tra quelle riportate è più vicina a quella da te proposta (o, se non ne hai proposta nessuna, quale è più vicina a quella che avresti proposto)?

- Quale tra quelle riportate utilizzeresti per **convincere** un tuo amico che l'affermazione "la somma di due numeri dispari è un numero pari" è vera?

- Quale tra quelle riportate ti sembra più efficace per **spiegare perché** l'affermazione è vera?

- Quale dimostrazione pensi che ti consentirebbe di ottenere il voto più alto da parte dell'insegnante?

RIEPILOGO

più vicina	form.scorr.	2,50%
	empirica	**38,75%**
	discorsiva	23,75%
	formale	**37,50%**
	grafica	5%
convincere	form.scorr.	5%
	empirica	**43,75%**
	discorsiva	13,75%
	formale	17,50%
	grafica	37,50%
spiegare	form.scorr.	5%
	empirica	17,50%
	discorsiva	28,75%
	formale	**38,75%**
	grafica	18,75%
voto+alto	form.scorr.	
	empirica	
	discorsiva	
	formale	
	grafica	

RIEPILOGO

più vicina	form.scorr.	2,50%
	empirica	**38,75%**
	discorsiva	23,75%
	formale	**37,50%**
	grafica	5%
convincere	form.scorr.	5%
	empirica	**43,75%**
	discorsiva	13,75%
	formale	17,50%
	grafica	37,50%
spiegare	form.scorr.	5%
	empirica	17,50%
	discorsiva	28,75%
	formale	**38,75%**
	grafica	18,75%
voto+alto	form.scorr.	
	empirica	2,50%
	discorsiva	
	formale	
	grafica	1,25%

RIEPILOGO

più vicina	form.scorr.	2,50%
	empirica	**38,75%**
	discorsiva	23,75%
	formale	**37,50%**
	grafica	5%
convincere	form.scorr.	5%
	empirica	**43,75%**
	discorsiva	13,75%
	formale	17,50%
	grafica	37,50%
spiegare	form.scorr.	5%
	empirica	17,50%
	discorsiva	28,75%
	formale	**38,75%**
	grafica	18,75%
voto+alto	form.scorr.	
	empirica	2,50%
	discorsiva	16,25%
	formale	
	grafica	1,25%

RIEPILOGO		
più vicina	form.scorr.	2,50%
	empirica	**38,75%**
	discorsiva	23,75%
	formale	**37,50%**
	grafica	5%
convincere	form.scorr.	5%
	empirica	**43,75%**
	discorsiva	13,75%
	formale	17,50%
	grafica	37,50%
spiegare	form.scorr.	5%
	empirica	17,50%
	discorsiva	28,75%
	formale	**38,75%**
	grafica	18,75%
voto+alto	form.scorr.	
	empirica	2,50%
	discorsiva	16,25%
	formale	**63,75%**
	grafica	1,25%

RIEPILOGO

più vicina	form.scorr.	2,50%
	empirica	**38,75%**
	discorsiva	23,75%
	formale	**37,50%**
	grafica	5%
convincere	form.scorr.	5%
	empirica	**43,75%**
	discorsiva	13,75%
	formale	17,50%
	grafica	37,50%
spiegare	form.scorr.	5%
	empirica	17,50%
	discorsiva	28,75%
	formale	**38,75%**
	grafica	18,75%
voto+alto	form.scorr.	30%
	empirica	2,50%
	discorsiva	16,25%
	formale	**63,75%**
	grafica	1,25%

Forma e contenuto

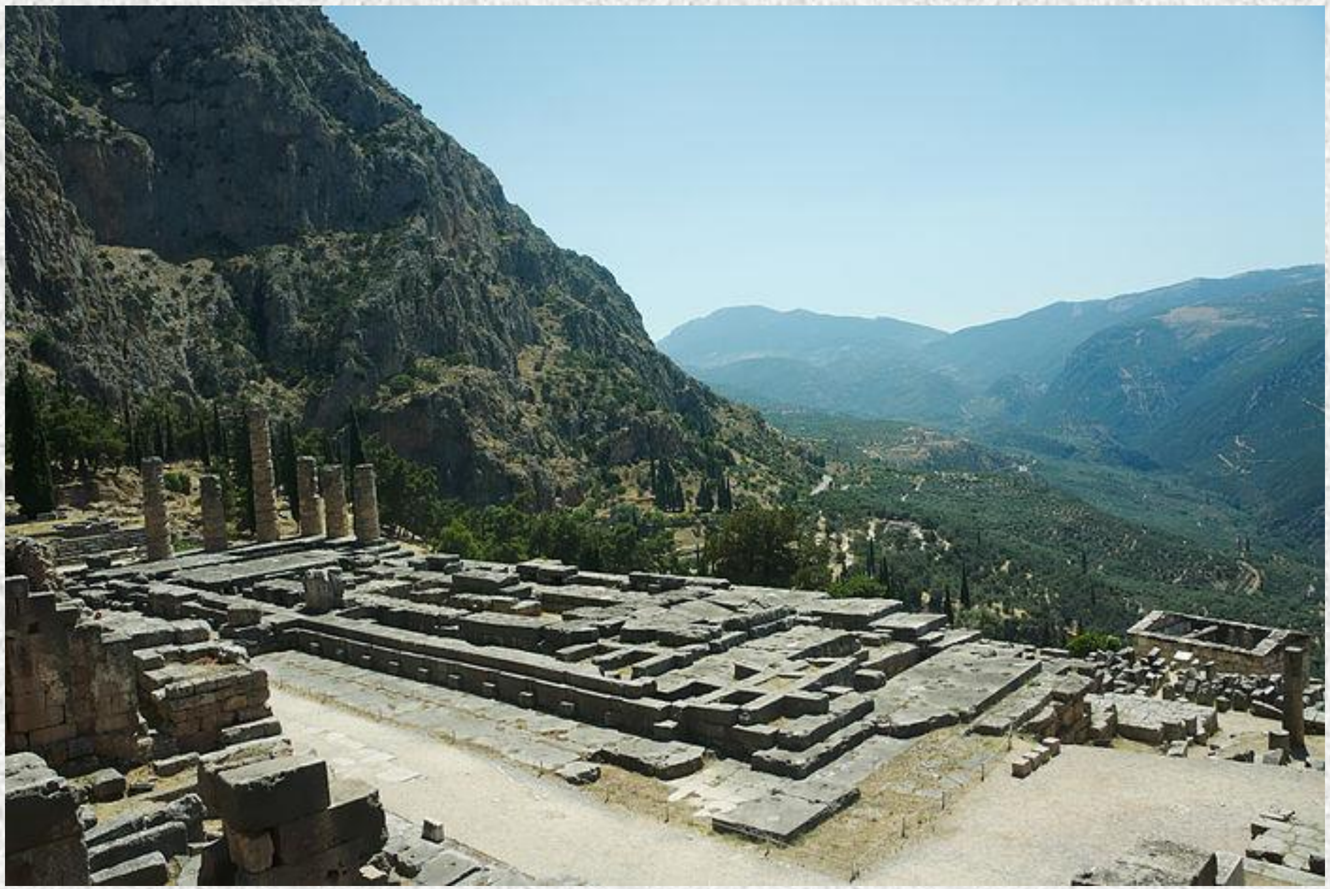
Gli studenti ritengono che PER L'INSEGNANTE una buona dimostrazione debba essere ricca di simboli. Probabilmente, nella loro scelta non hanno nemmeno controllato la logica della dimostrazione: 1 studente su 3 (in algebra) sceglie una dimostrazione completamente priva di senso, ma che evidentemente SEMBRA "più matematica" delle altre anche se non ha nessun ruolo oltre a quello di compiacere l'insegnante.

La scelta si basa sull'aspetto esteriore

Per sé stessi gli studenti, tranne rare eccezioni, scelgono argomentazioni di tipo empirico o dimostrazioni narrative o formali comunque corrette.

La scelta della dimostrazione si basa sul suo contenuto

Funzioni della dimostrazioni (Rav, 1999) e l’oracolo di Delfi



Tempio di Apollo a Delfi, a 8 km dal Golfo di Corinto

Funzioni della dimostrazioni (Rav, 1999) e l’oracolo di Delfi

Funzioni della dimostrazioni (Rav, 1999) e l’oracolo di Delfi

Pythiagora

Paradiso o sventura?

Funzioni della dimostrazioni (Rav, 1999) e l’oracolo di Delfi

Noi matematici dovremmo solo produrre congetture, e PYTHIAGORA togliere il falso dal vero. Che paradiso!
Che pacchia! Ho detto pacchia? No, è un destino tragico!
Un simile metodo universale sarebbe la morte per la matematica, perché cesseremmo di avere idee candidabili a congetture.

Funzioni della dimostrazioni (Rav, 1999) e l'oracolo di Delfi

Punto di vista usuale: l'essenza della conoscenza matematica risiede nei teoremi. Le dimostrazioni ratificano la validità dei teoremi.

Posizione non soddisfacente da un punto di vista filosofico: non spiega l'origine e l'evoluzione della conoscenza

Funzioni della dimostrazioni (Rav, 1999) e l’oracolo di Delfi

La conoscenza ha origine e sviluppo nelle dimostrazioni. I teoremi sono etichette per le dimostrazioni, sunti di informazioni, titoli di notizie, strumenti editoriali.

Funzioni della dimostrazioni (Rav, 1999) e l'oracolo di Delfi

L'essenza della matematica risiede nell'inventare metodi, strumenti, strategie e concetti per risolvere problemi

Funzioni della dimostrazioni (Rav, 1999) e l'oracolo di Delfi

Le dimostrazioni incorporano metodi, strumenti, strategie e concetti (di applicabilità spesso decisamente più ampia di quella relativa al teorema)

I teoremi sono i titoli di testa, le dimostrazioni l'intera storia!

Le dimostrazioni portano conoscenza matematica e sono il focus principale di interesse matematico

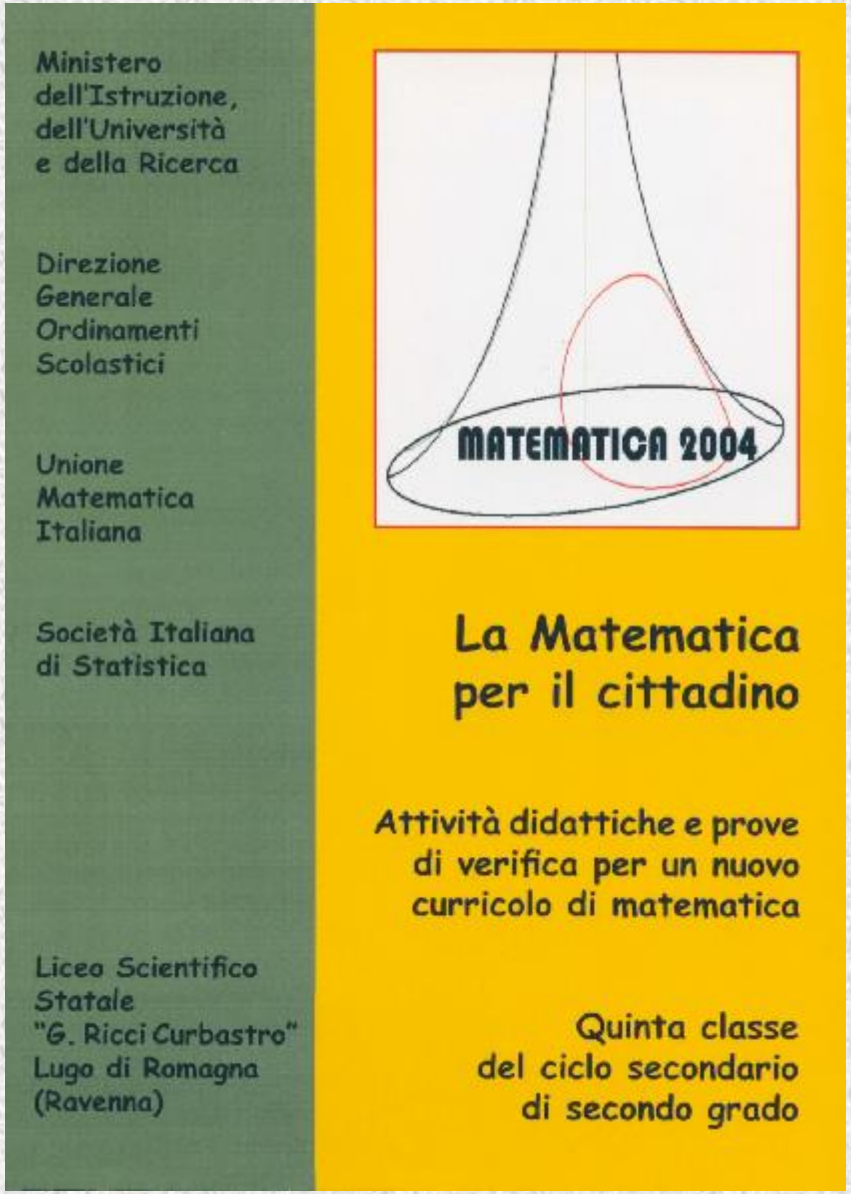
…..anche in classe

Funzioni della dimostrazioni (Rav, 1999) e l’oracolo di Delfi

Nuove dimostrazioni di vecchi teoremi

Congettura di Goldbach, Jean Merlin e nuovi crivelli

Ultimo teorema di Fermat (1637-1994), l’oracolo killer, il rifiuto di Gauss,…



Uno dei nuclei:

Argomentare, congetturare, dimostrare

Indicazioni nazionali per il primo ciclo

Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il «pensare» e il «fare» e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani. In particolare, **la matematica** dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; **contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri**. (p. 60)

INDICAZIONI NAZIONALI

Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio*, per favorire l'operatività e allo stesso tempo* ***il dialogo e la riflessione su quello che si fa****. Il laboratorio, se ben organizzato, è la modalità di lavoro che meglio incoraggia la ricerca e la progettualità, coinvolge gli alunni nel* ***pensare, realizzare, valutare*** *attività vissute in modo condiviso e partecipato con altri, e può essere attivata sia nei diversi spazi e occasioni interni alla scuola sia valorizzando il territorio come risorsa per l'apprendimento*. (p. 27)

INDICAZIONI NAZIONALI

In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il ***laboratorio,*** *inteso sia come luogo fisico sia come* ***momento in cui l'alunno è attivo****,* ***formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte****, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.* […] (p. 49)

Indicazioni nazionali per il I ciclo

Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.
Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri*.*
[…]
Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative….

ISTITUTI TECNICI

*Il docente di "Matematica" concorre a far conseguire, al termine del percorso quinquennale, i seguenti risultati di apprendimento relativi al profilo educativo, culturale e professionale: **padroneggiare** il linguaggio formale e i **procedimenti dimostrativi** della matematica…*

[…]

*……. ABILITA': **dimostrare** una proposizione a partire da altre*

Indicazioni nazionali: LICEI

*Comprendere le **strutture portanti dei procedimenti argomentativi e dimostrativi** della matematica, anche attraverso la padronanza del linguaggio logico-formale; usarle in particolare nell'individuare e risolvere problemi di varia natura;*

[…]

CONCETTI E METODI OBIETTIVI DELLO STUDIO:

*- gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i **procedimenti caratteristici del pensiero matematico** (**definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni**)*

Indicazioni nazionali: LICEI

PRIMO BIENNIO LICEO SCIENTIFICO E CLASSICO

Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema […] e risolverlo, sia per ***dimostrare*** *risultati generali…*

[…]

Verrà chiarita l’importanza e il significato dei ***concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione…***

Indicazioni nazionali: LICEI

Risultati di apprendimento

Area logico-argomentativa

- ***Saper sostenere una propria tesi e saper ascoltare e valutare criticamente le argomentazioni altrui****.*
- ***Acquisire l'abitudine a ragionare con rigore logico****, ad identificare i problemi e a individuare soluzioni.*
- *Essere in grado di leggere e interpretare criticamente i contenuti delle diverse forme di comunicazione.*

Area scientifica, matematica e tecnologica

- Comprendere il linguaggio formale specifico della matematica, ***saper utilizzare le procedure tipiche del pensiero matematico,*** *conoscere i contenuti fondamentali delle teorie che sono alla base della descrizione matematica della realtà*

Indicazioni nazionali: licei

Per raggiungere questi risultati occorre il concorso e la piena valorizzazione di tutti gli aspetti
del lavoro scolastico:

- lo studio delle discipline in una prospettiva sistematica, storica e critica;
- la pratica dei metodi di indagine propri dei diversi ambiti disciplinari;
- l'esercizio di lettura, analisi, traduzione di testi letterari, filosofici, storici, scientifici, saggistici e di interpretazione di opere d'arte;
- l'uso costante del laboratorio per l'insegnamento delle discipline scientifiche;
- **la pratica dell'argomentazione e del confronto**;
- la cura di una modalità espositiva scritta ed orale corretta, pertinente, efficace e personale;
- l'uso degli strumenti multimediali a supporto dello studio e della ricerca.

Si tratta di un elenco orientativo, volto a fissare alcuni punti **fondamentali e imprescindibili** che solo la pratica didattica è in grado di integrare e sviluppare.

Indicazioni nazionali per il primo ciclo

Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come **questioni autentiche e significative**, legate alla vita quotidiana, e **non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola**.(p. 60)

Indicazioni nazionali per il primo ciclo

Traguardi per lo sviluppo delle competenze

Termine scuola primaria

Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, **sostenendo le proprie idee** e confrontandosi con il **punto di vista** di altri.

Termine scuola secondaria di primo grado

Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite […] Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; **accetta di cambiare opinione** riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.

Indicazioni nazionali per il primo ciclo

Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata **visione della matematica**, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo.(p. 60)

In estrema sintesi…. dalle indicazioni nazionali

Traguardi di apprendimento

Conoscere metodi e procedimenti della matematica, padroneggiare diversi metodi dimostrativi

Saper formulare congetture, produrre argomentazioni a supporto delle congetture, dimostrare enunciati di matematica

Comprendere argomentazioni e dimostrazioni

Sviluppare «atteggiamento matematico», fare esperienza del lavoro del matematico

Argomentazione, dimostrazione, argomentare, dimostrare

Un esempio che è solo un esempio (secondaria di I grado)

argomentazione

punto di vista

problema

laboratorio matematico

decisioni

modellizzare

Laboratorio di teoria dei giochi

Contesto: Piano Lauree Scientifiche 2016/2017

Laboratorio per insegnanti di scuola secondaria
di I e II grado (4 incontri)

Attività in classe (II e III secondaria di I grado) condotta
da insegnanti (6-8 ore)

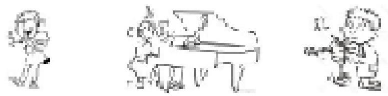
Teoria dei giochi

Attività didattica

Obiettivo: promuovere, mediante problemi della teoria dei giochi cooperativi, **processi decisionali**, produzione di **argomentazioni, controargomentazioni, assunzione di diversi punti di vista e la transizione tra essi**, **processi di modellizzazione**

Problemi proposti

Scheda Numero 2



Scheda del problema

a	100,00
b	150,00
c	180,00
a,b	400,00
a,c	300,00
b,c	420,00
a,b,c	600,00

a >	100,00
b >	150,00
c >	180,00
a+b >	400,00
a+c >	300,00
b+c >	420,00

nucleo		
min		max
100,00	a	180,00
150,00	b	300,00
180,00	c	200,00

soluzione ripartizione secca	
a	200
b	200
c	200

soluzione proporzionale	
a	139,5349
b	209,3023
c	251,1628

surplus	
a	156,6667
b	206,6667
c	236,6667

Shaplye			
	a	b	c
a,b,c	100,00	300,00	200,00
a,c,b	100,00	300,00	200,00
b,a,c	250,00	150,00	200,00
b,c,a	180,00	150,00	270,00
c,a,b	120,00	300,00	180,00
c,b,a	180,00	240,00	180,00
MEDIA	155,00	240,00	205,00

Scheda Numero 4

DATA……………………

GRUPPO………………………………………………………………………

ORIENTATO AL COMPITO: ……………………………………………………

ORIENTATO AL GRUPPO: ……………………………………………………

RELATORE: ………………………………………………………………………

MEMORIA: ………………………………………………………………………

OSSERVATORE: ……………………………………………………………

OTTIMIZZARE I COSTI …MA COME?

…mpagnie aeree: Skyair, Bluitalia e VolaconNoi che hanno interesse a …ista di atterraggio in un nuovo aeroporto. La prima compagnia ha degli …e per atterrare hanno bisogno di un piccolo pezzetto di pista, ovvero …la compagnia ha bisogno di 2km di pista e la terza avendo aerei più

…no di 3 km di pista. Il costo di ogni kilometro di pista è di 100 dobloni.

…i panni delle tre compagnie aeree; provate a ipotizzare se e come …ersi d'accordo, spiegando come potrebbero suddividere le spese. …notivare in modo adeguato le vostre affermazioni!!

Il Problema dei musicisti: trovare un buon accordo

Tre musicisti: Ada (cantante), Bea (pianista) e Ciro (violinista) vengono contattati per suonare ad una festa. Potranno esibirsi: da soli, in coppia o in tre. Le ricompense stabilite dall'organizzatore dell'evento sono le seguenti:

Ada	**100**	**Ada+Bea**	**400**
Bea	**150**	**Ada+Ciro**	**300**
Ciro	**180**	**Bea+Ciro**	**420**
Ada+Bea+Ciro			**600**

Mettendovi nei panni dei tre musicisti; provate a discutere l'offerta e spiegate in che modo Ada, Bea e Ciro potrebbero accordarsi. Ricordatevi di motivare in modo adeguato le vostre affermazioni!!

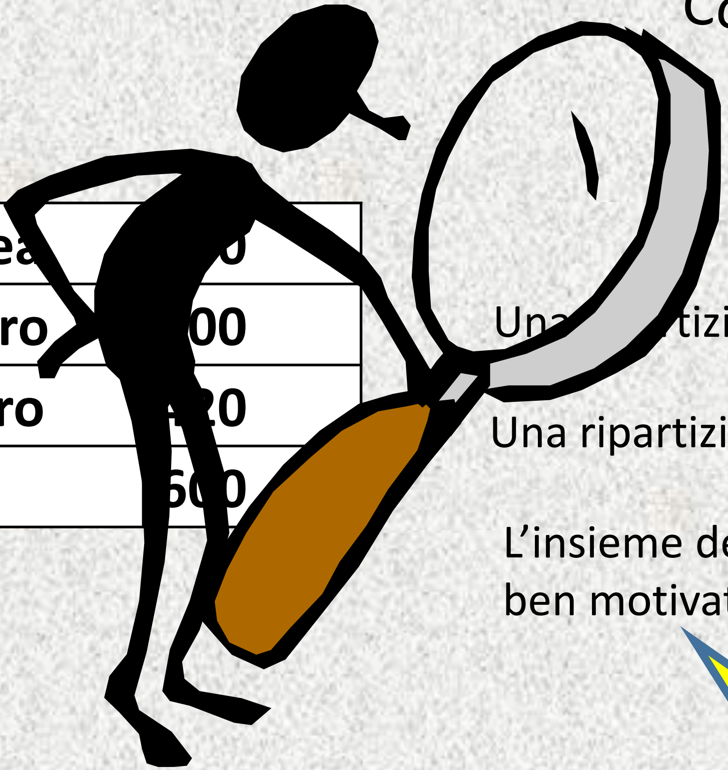
Il Problema dei musicisti: trovare un buon accordo

Cos’è una soluzione?

Ada	**100**	**Ada+Bea**	**400**
Bea	**150**	**Ada+Ciro**	**300**
Ciro	**180**	**Bea+Ciro**	**420**
Ada+Bea+Ciro			**600**

Il Problema dei musicisti: trovare un buon accordo

Ada	**100**	**Ada+Bea**	[illegible]
Bea	**150**	**Ada+Ciro**	[illegible]
Ciro	**180**	**Bea+Ciro**	[illegible]
Ada+Bea+Ciro			[illegible]



Cos'è una soluzione?

Una [illegible]tizione del guadagno

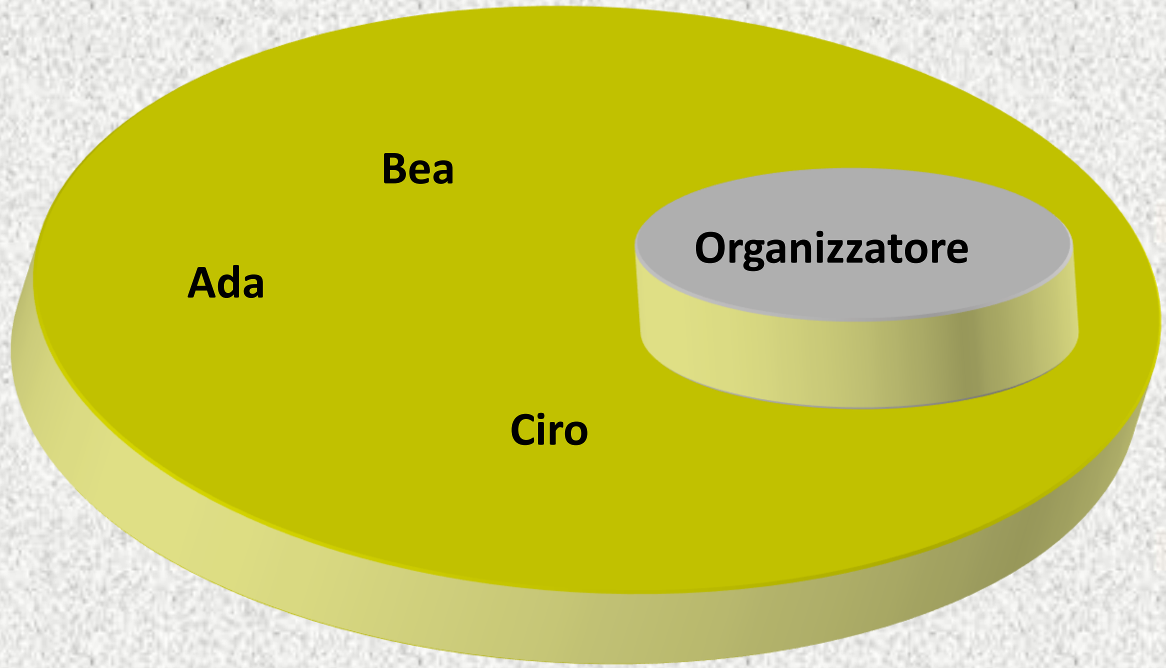
Una ripartizione del guadagno ben motivata

L'insieme delle ripartizioni del guadagno ben motivate

Su cosa?

Una ripartizione sarà motivata in base alle aspettative, ai vincoli, alle richieste dei musicisti e dell'organizzatore dell'evento….

Cos'è una soluzione?

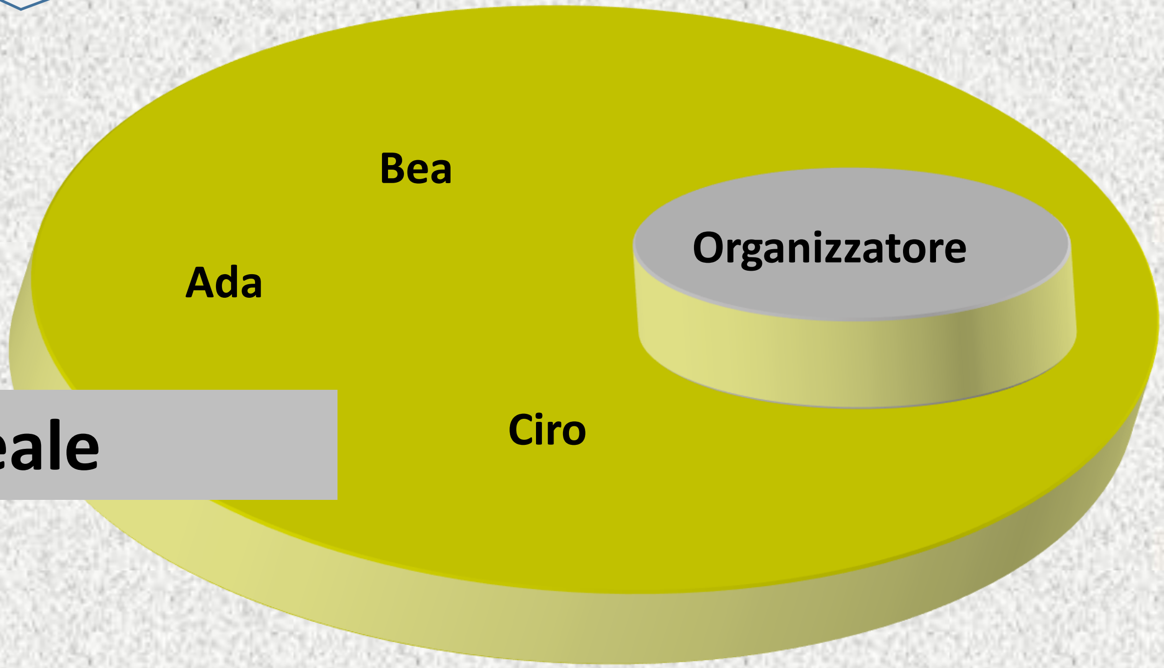


Modello

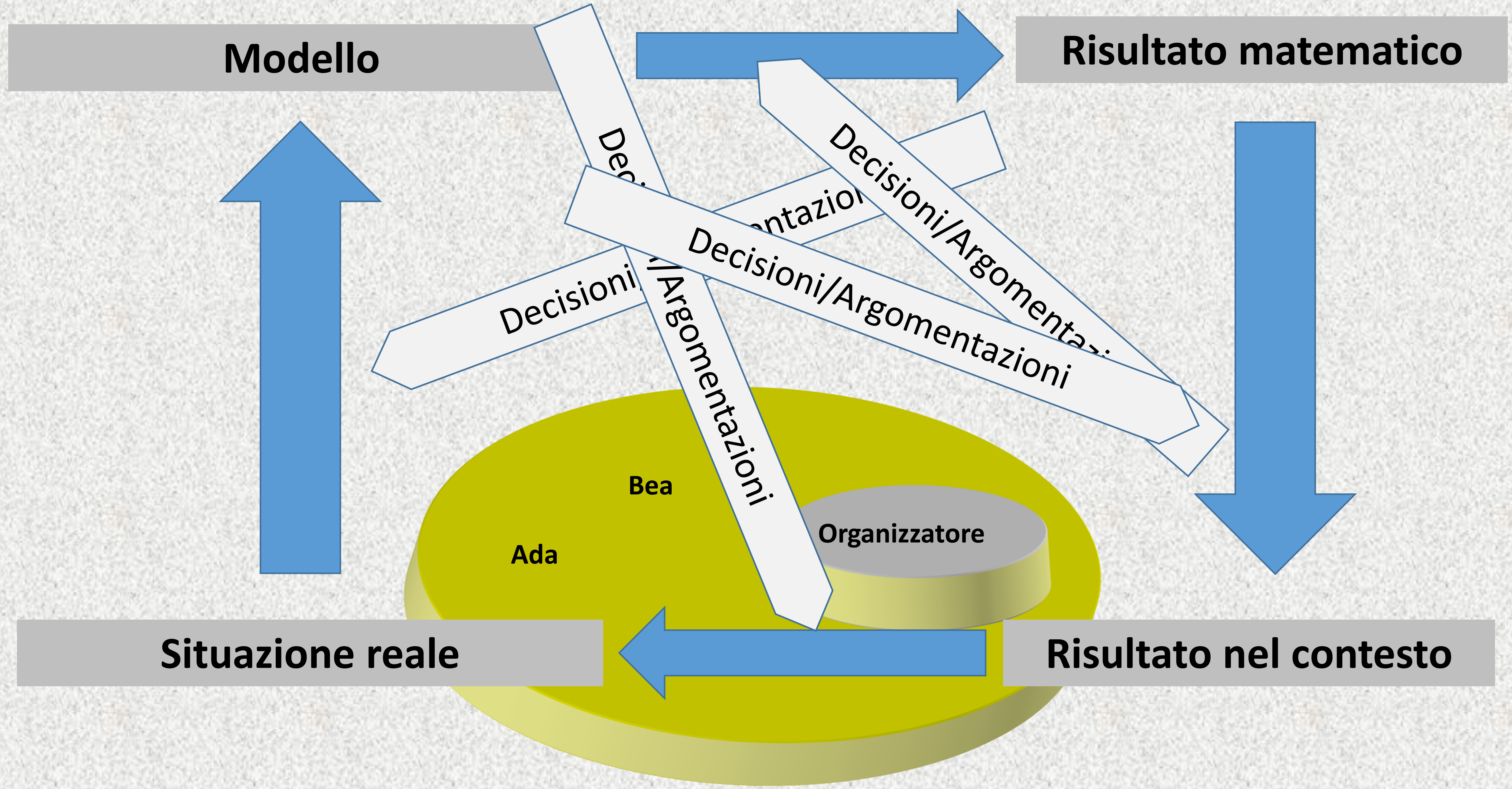
Una ripartizion rà motivata in base
alle aspettativ vincoli, alle richi
dei musicisti e organizz
dell’evento….

Decisioni/Argomentazioni

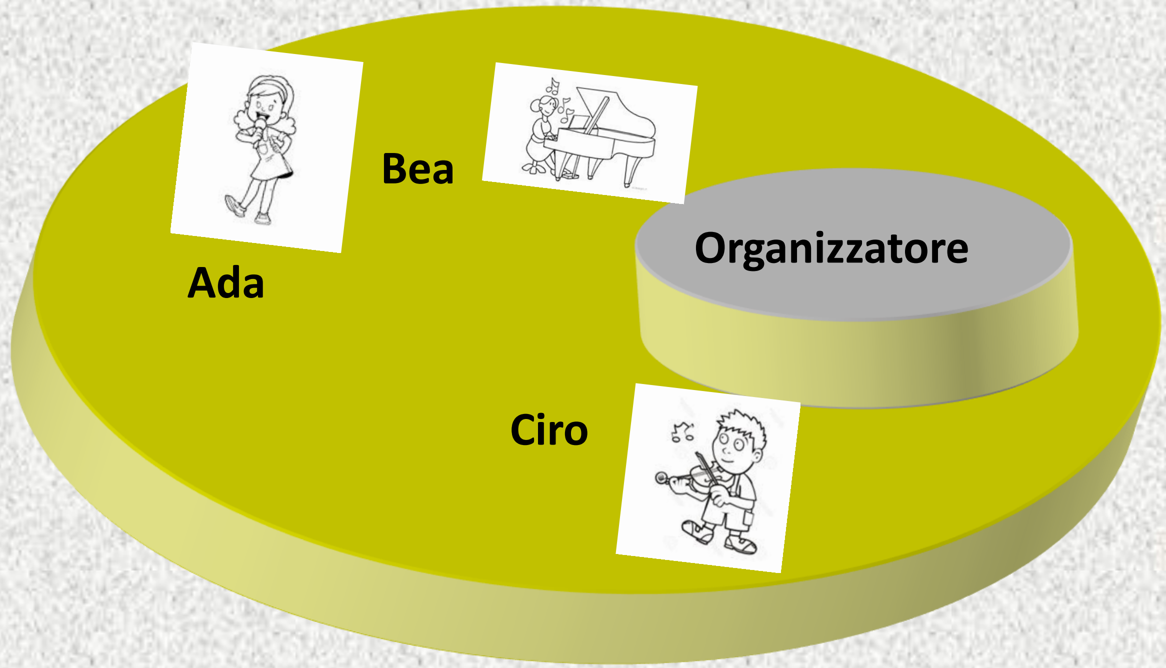
Cos’è una soluzione?



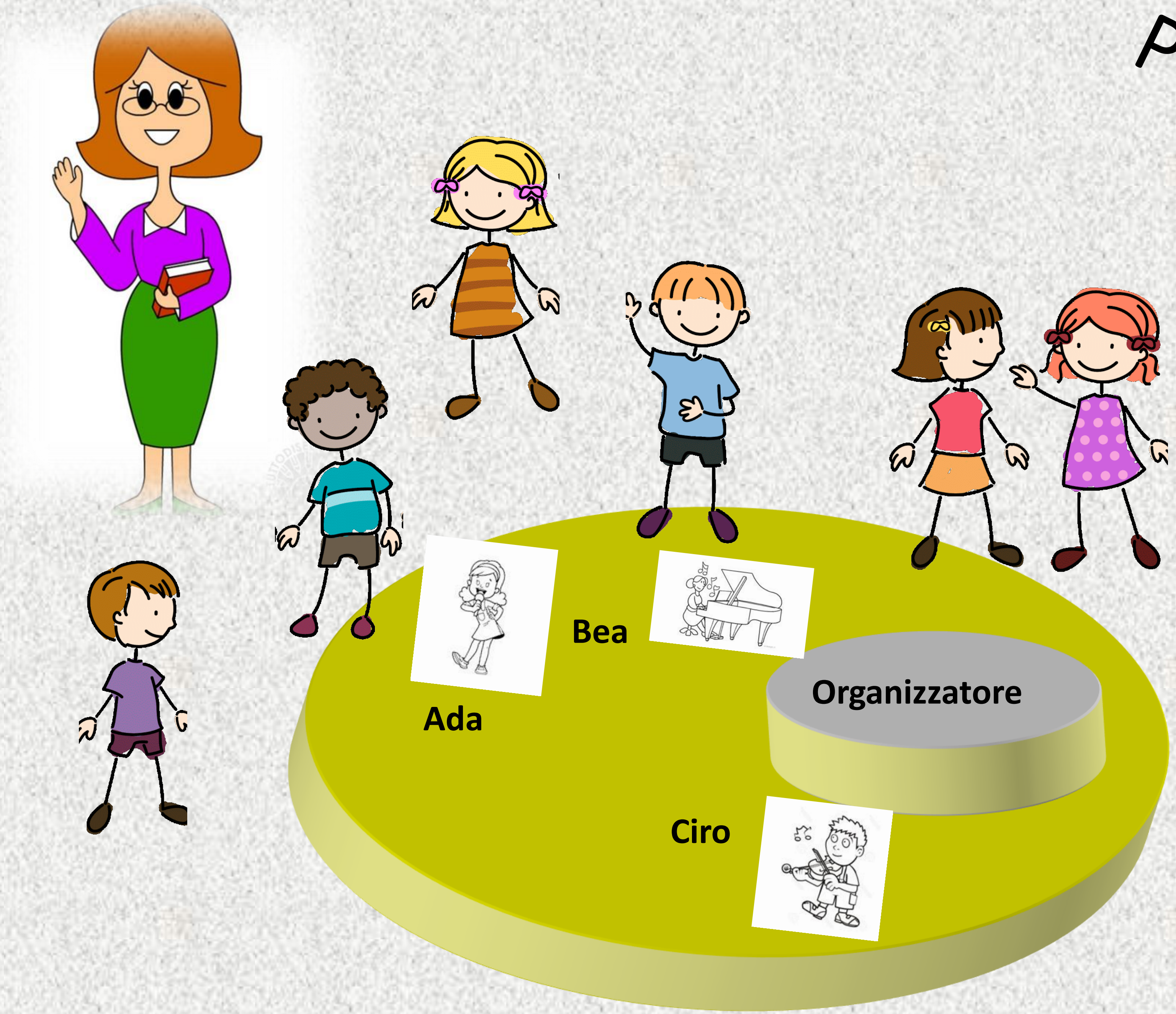
Situazione reale


Modello
Risultato matematico
Situazione reale
Risultato nel contesto
Decisioni/Argomentazioni
Decisioni/Argomentazioni
Decisioni/Argomentazioni
Bea
Ada
Organizzatore

Punti di vista



Punti di vista



Laboratorio di teoria dei giochi

Andare in laboratorio è - principalmente, ma non solo - una metafora.

In questo caso è il **luogo** e il **momento** in cui:

- prendere decisioni, averne consapevolezza e renderle esplicite;
- produrre argomentazioni a sostegno delle scelte effettuate;
- cambiare punto di vista e comprendere le argomentazioni altrui al fine di controargomentare e di arrivare ad una proposta condivisa;
- costruire un modello matematico, derivare conseguenze, valutare l’adeguatezza delle soluzioni fornite dal modello e validare il modello stesso

Laboratorio di teoria dei giochi

- Lavoro di gruppo
- Presentazione del lavoro di gruppo da parte di un relatore
- Discussione collettiva

Prime proposte
….. Tutte corrette!

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	**Bea**	**Ciro**
Equamente	200	200	200

Se sono amici

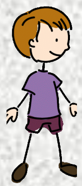
Perché 600:3=200 che è di più del guadagno andando da singoli

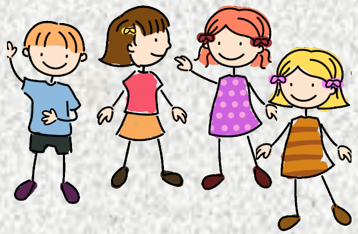
Prime proposte
….. Tutte corrette!

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

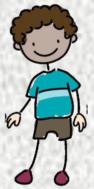
	Ada	**Bea**	**Ciro**
Frazioni	600*100/430	600*150/430	600*180/430

Ciro guadagna di più degli altri cioè vale di più degli altri





Quindi potrebbe dire perché dobbiamo dividere in parti uguali se io da solo valgo di più, voglio di più

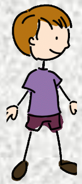


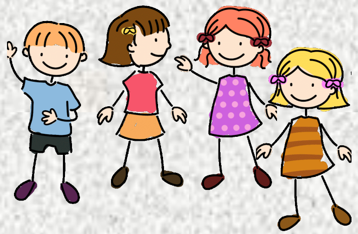
Prime proposte
….. Tutte corrette!

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

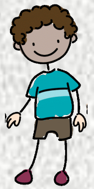
	Ada	**Bea**	**Ciro**
Frazioni	600*100/430	600*150/430	600*180/430

Abbiamo […] due proposte… c’è n’è una meglio dell’altra?





Dipende da che parte si guarda



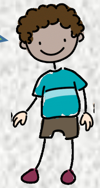
Prime proposte
….. Tutte corrette!

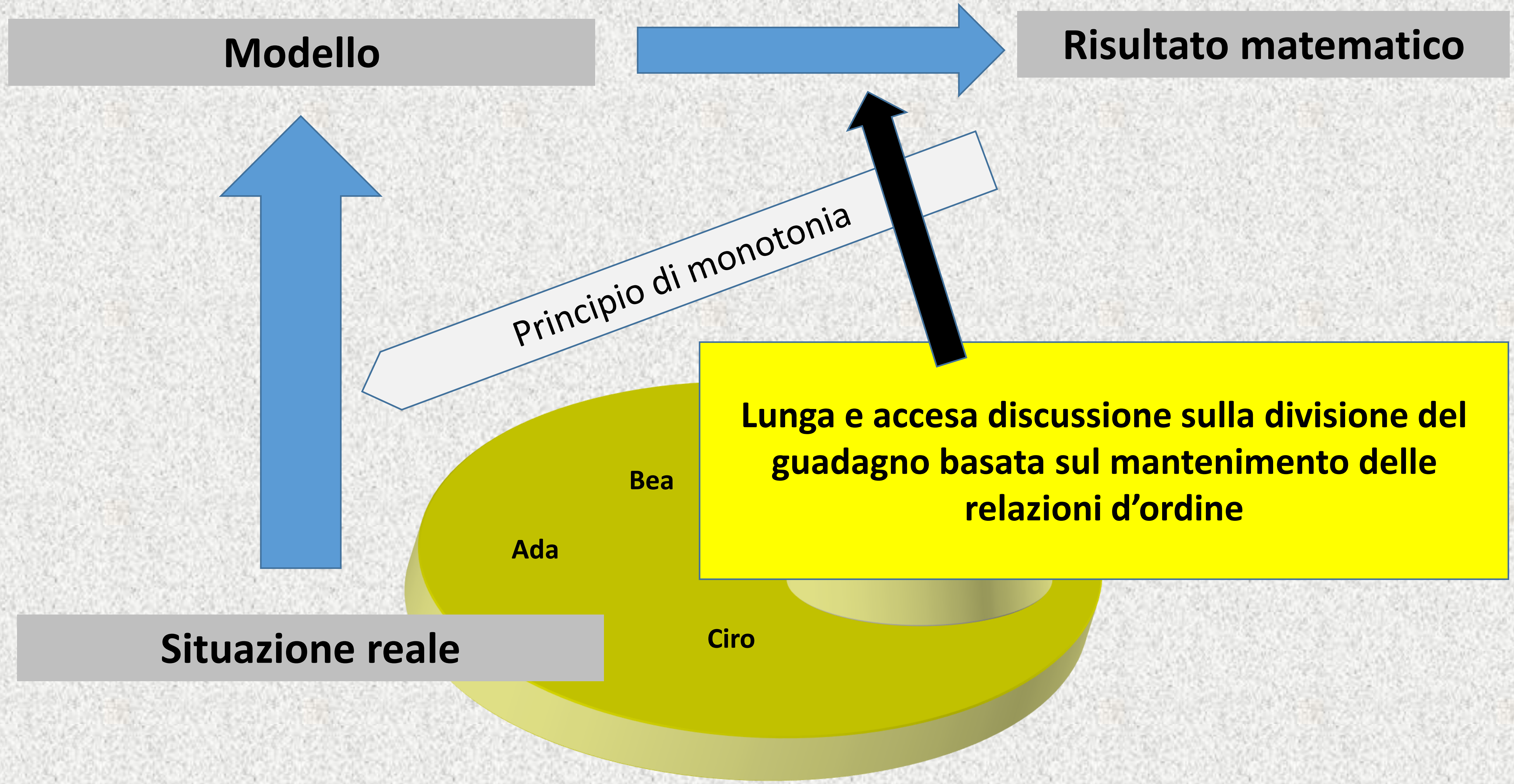
Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	**Bea**	**Ciro**
Surplus	100+56,6	150+56,6	180+56,6

Siamo riusciti mantenendo le cifre di quello che guadagna di più e quello che guadagna di meno, siamo riusciti a dividerlo equamente

Perché tutti in questo modo guadagnano 56,6 euro in più



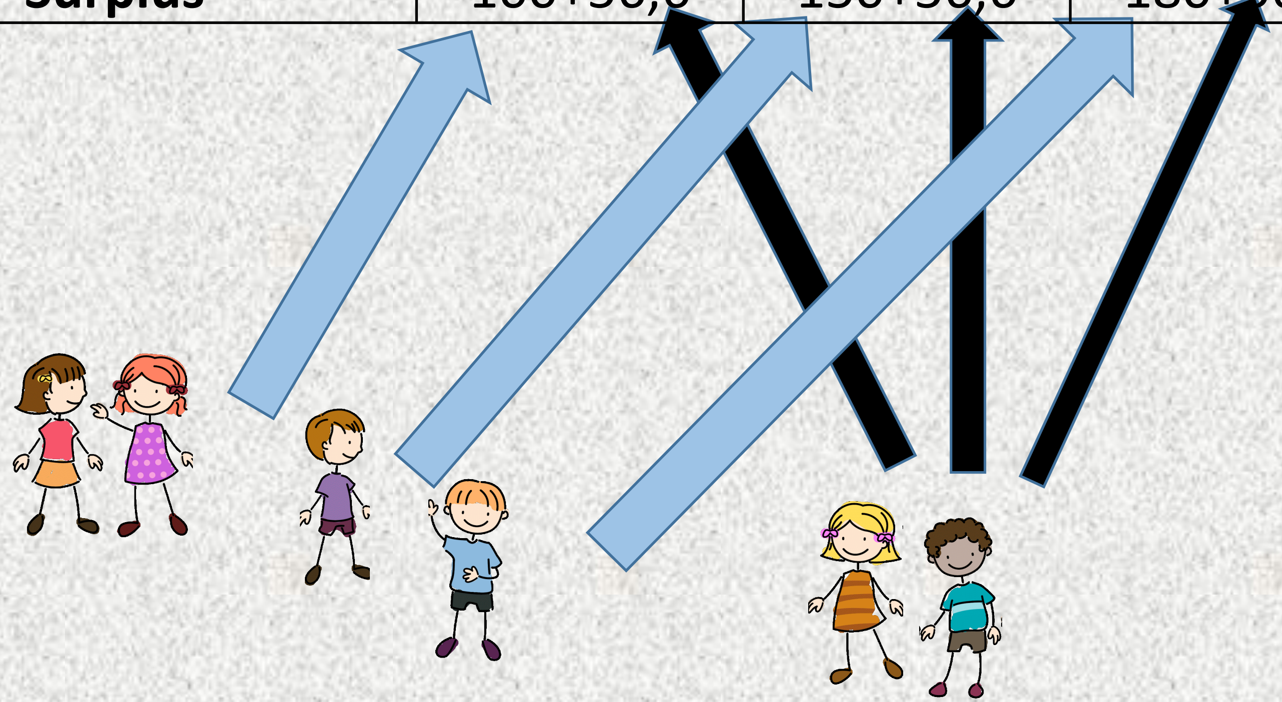


Modello
Risultato matematico
Principio di monotonia
Bea
Ada
Ciro
Lunga e accesa discussione sulla divisione del guadagno basata sul mantenimento delle relazioni d’ordine
Situazione reale

Prime proposte
….. Tutte corrette!

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	**Bea**	**Ciro**
Surplus	100+56,6	150+56,6	180+56,6



Prime proposte
….. Tutte corrette!

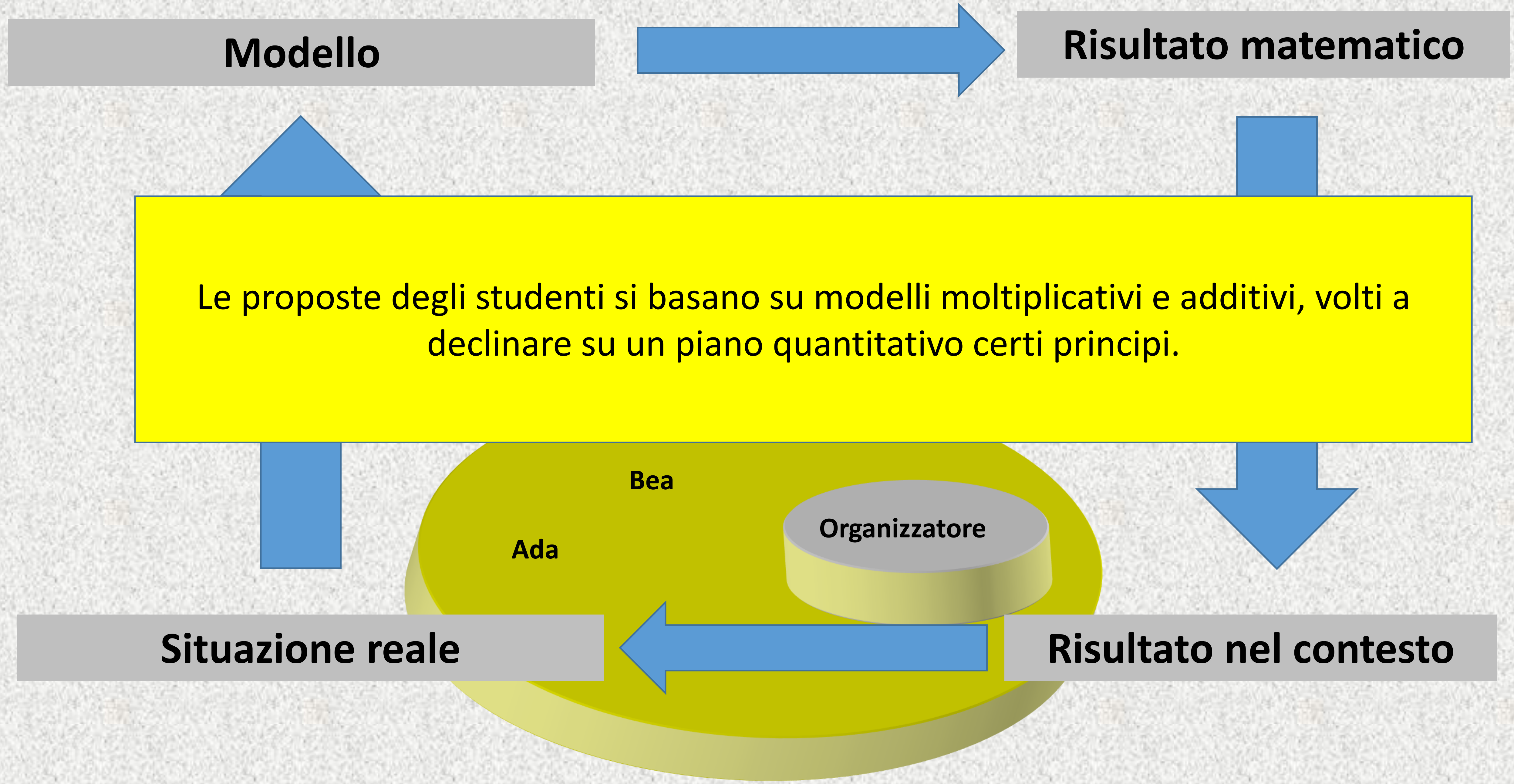
Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

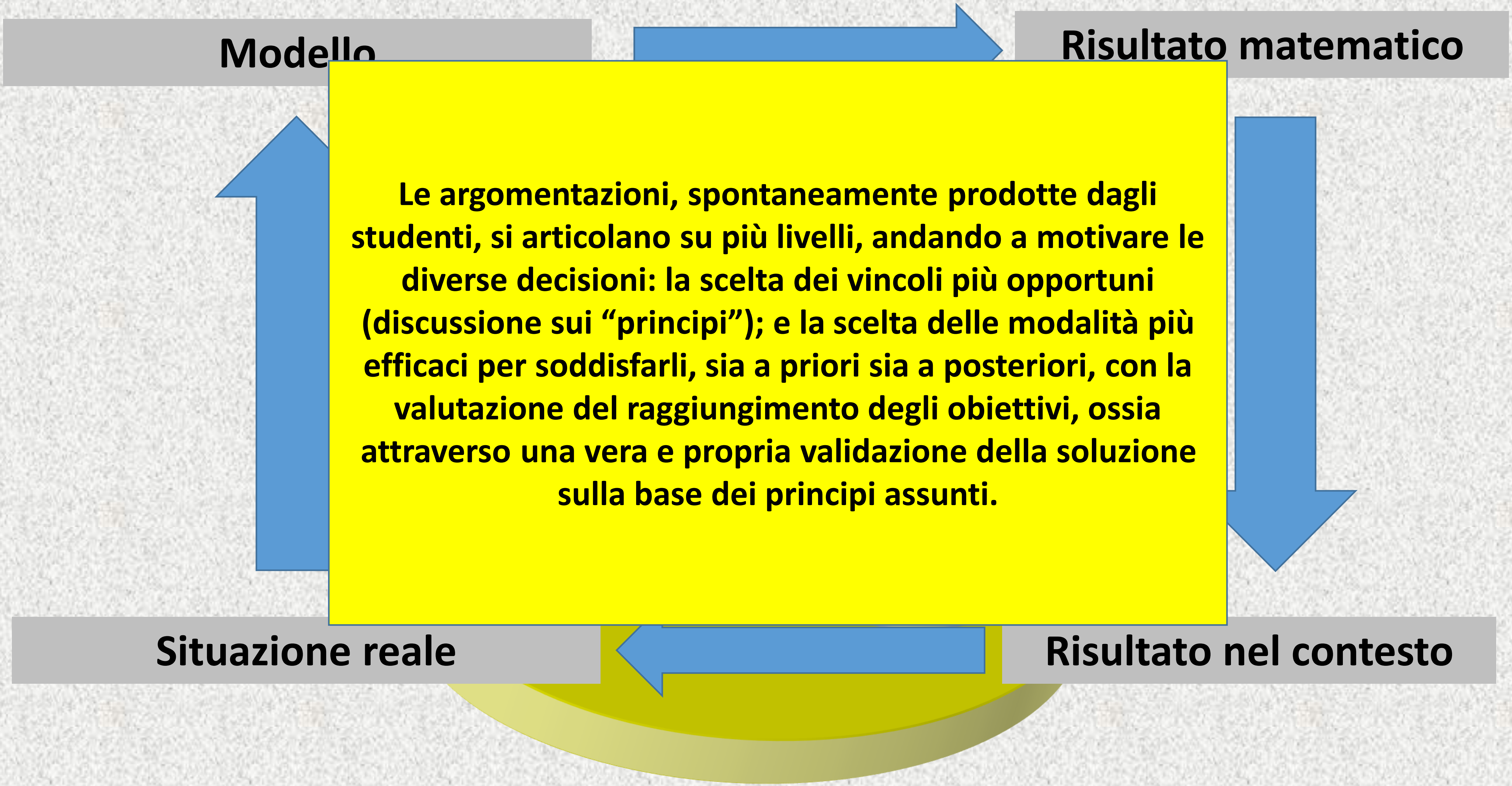
	Ada	**Bea**	**Ciro**
Surplus	100+56,6	150+56,6	180+56,6
Surplus a Ciro	100+50	150+50	180+70

Prime proposte
….. Tutte corrette!

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	**Bea**	**Ciro**
Equamente	200	200	200
Frazioni	140	209	251
Surplus	156,6	206,6	236,6
Surplus a Ciro	150	200	250


Modello
Risultato matematico
Le proposte degli studenti si basano su modelli moltiplicativi e additivi, volti a declinare su un piano quantitativo certi principi.
Bea
Organizzatore
Ada
Situazione reale
Risultato nel contesto



Le argomentazioni, spontaneamente prodotte dagli studenti, si articolano su più livelli, andando a motivare le diverse decisioni: la scelta dei vincoli più opportuni (discussione sui "principi"); e la scelta delle modalità più efficaci per soddisfarli, sia a priori sia a posteriori, con la valutazione del raggiungimento degli obiettivi, ossia attraverso una vera e propria validazione della soluzione sulla base dei principi assunti.

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

Gioco dei punti di vista

Ada+Bea		Ciro
100+75	150+75	180

C’è qualcuno che vuole fare il Ciro della situazione?

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

Gioco dei punti di vista

Ada+Bea		**Ciro**
100+75	150+75	180

Propongo a Bea di venire con me così guadagna di più

Una possibilità sarebbe stata:
Ciro: 190
Bea: 230

Ma propone:
Ciro: 225
Bea: 195

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

Gioco dei punti di vista

Ada+Bea		**Ciro**
100+75	150+75	180

Propongo a Bea di venire con me così guadagna di più

Una possibilità sarebbe stata:
Ciro: 190
Bea: 230

Ma propone:
Ciro: 225
Bea: 195

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

Gioco dei punti di vista

Ada+Bea		Ciro
100+75	150+75	180

Bea non ci sta

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

Gioco dei punti di vista

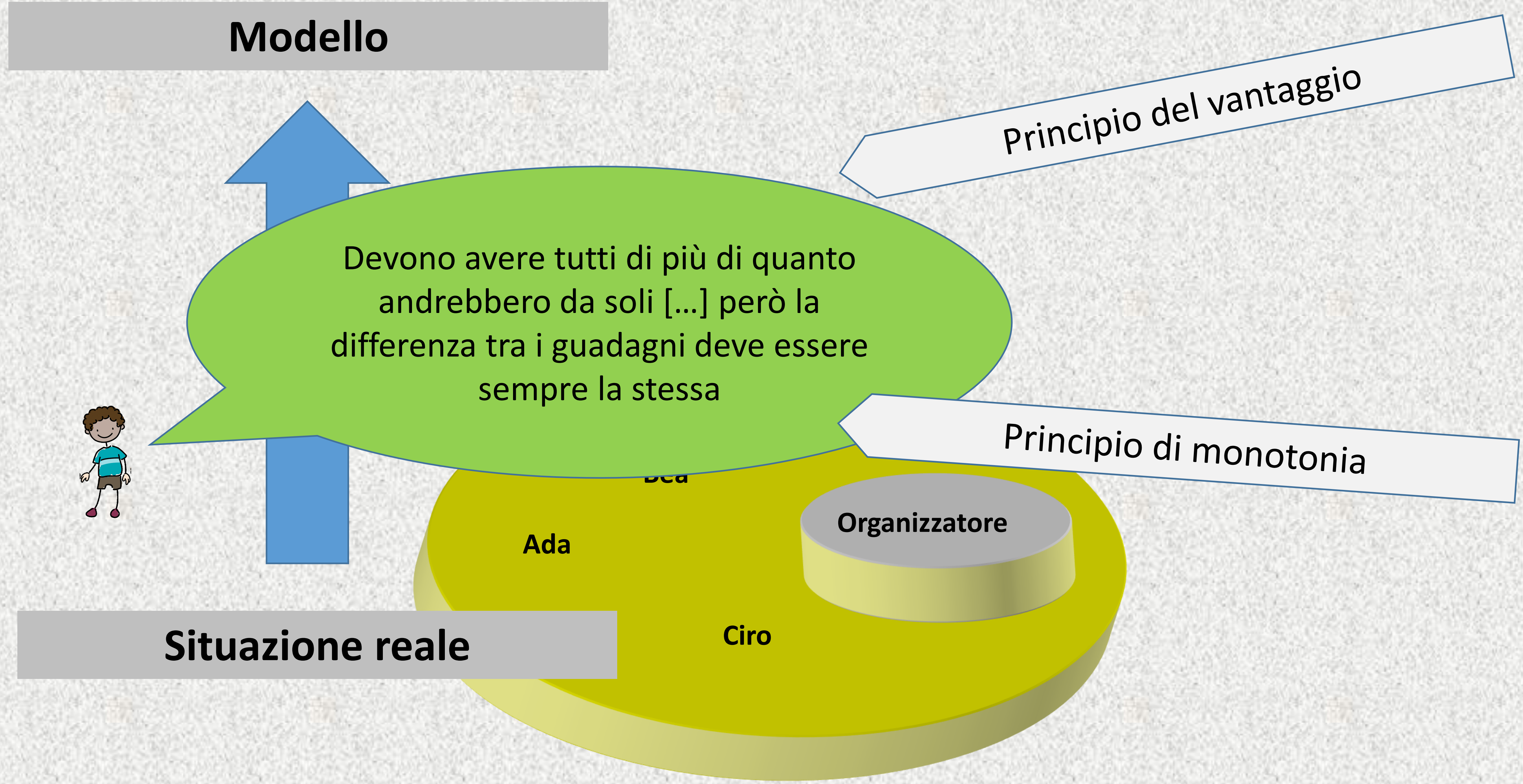
Ada+Bea		**Ciro**
100+75	150+75	180

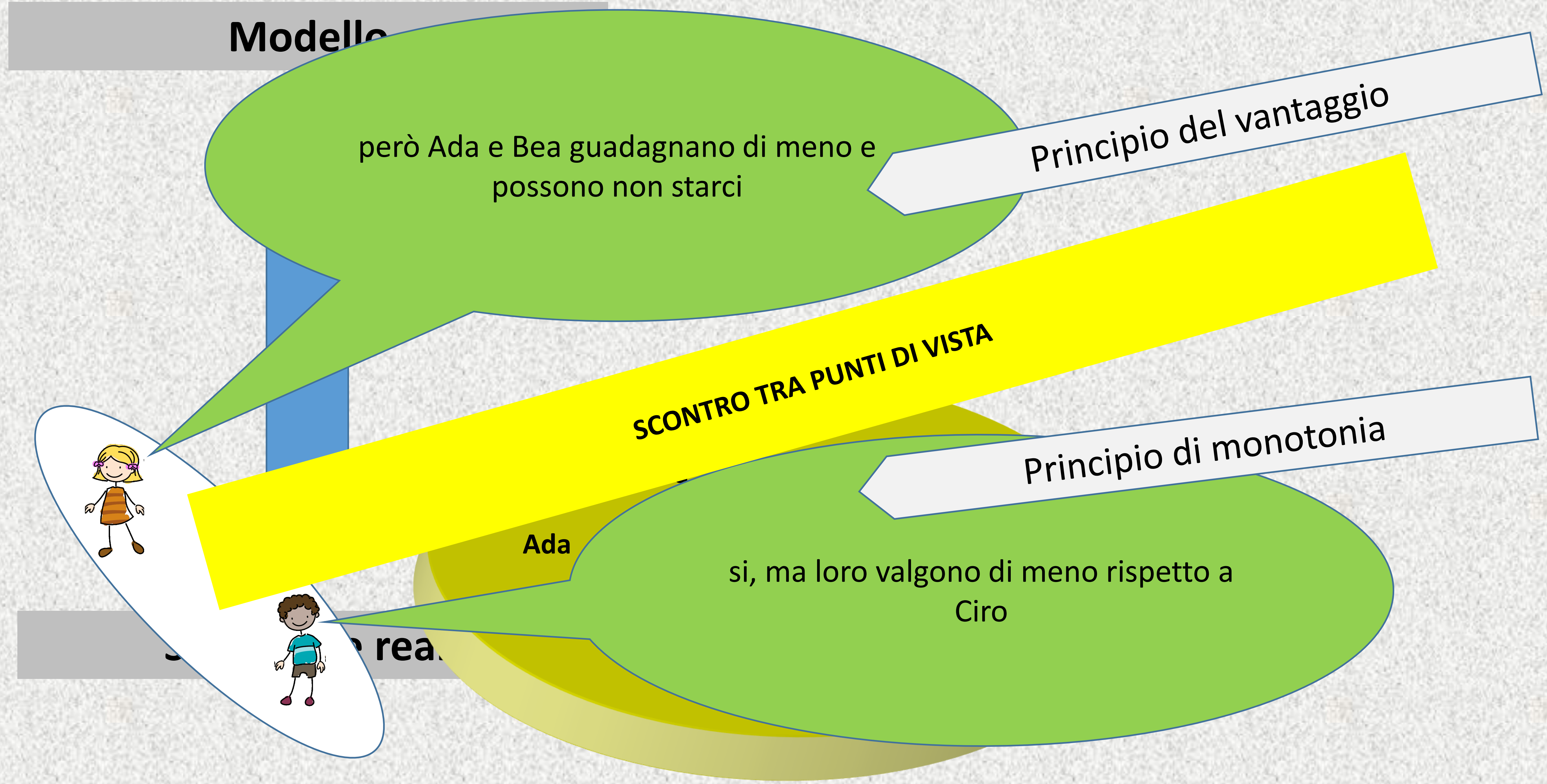
Recitando la parte di Ciro, gli studenti realizzano che, se Ada e Bea decidono di suonare insieme e di dividersi 400 euro in parti uguali, Ciro può proporre a Bea di suonare con lui prendendosi 190 euro (dei 420) e lasciandone 230 a Bea. Per entrambi sarebbe un vantaggio

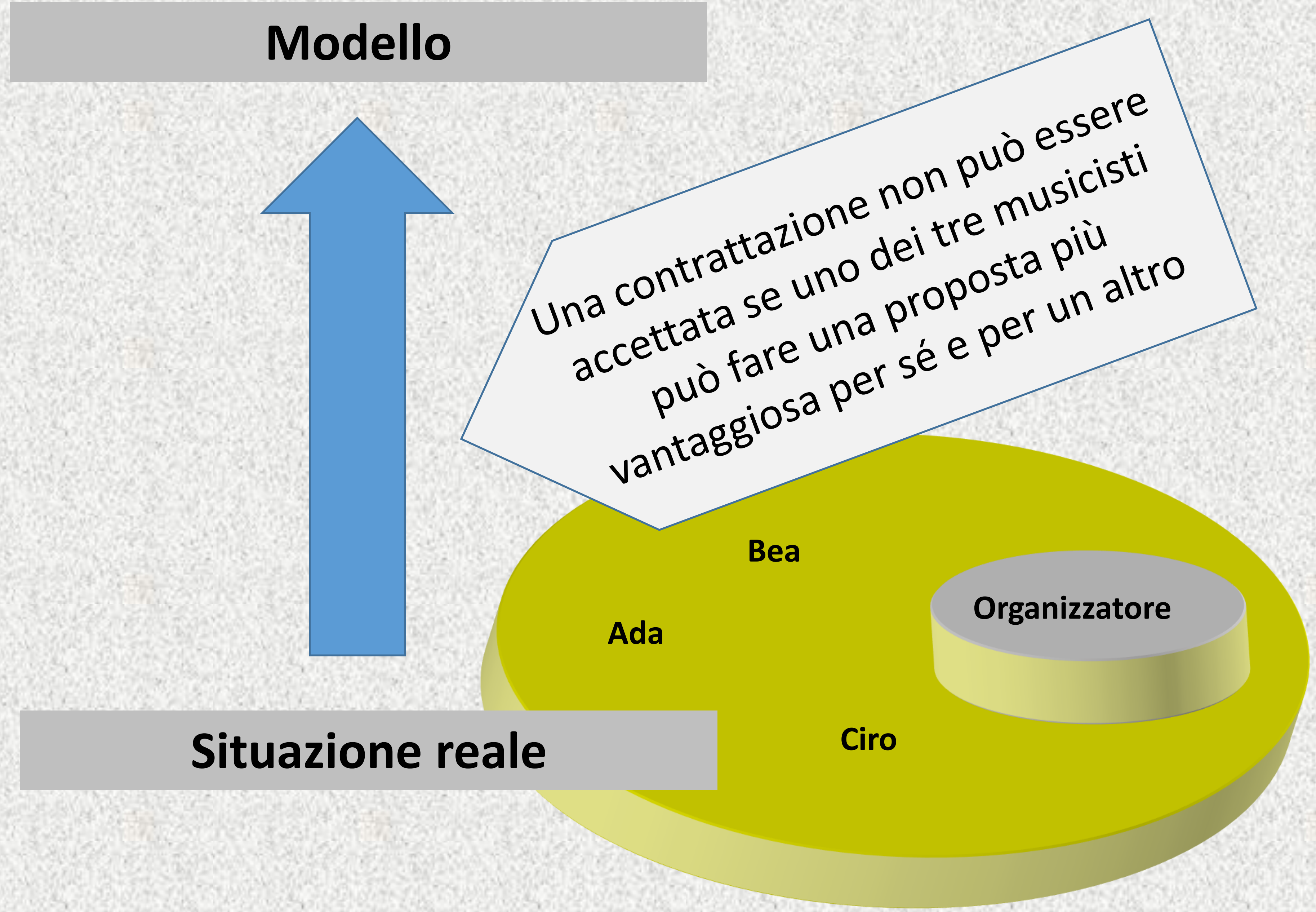
Gli alunni immaginano una scenetta in cui impersonano via via personaggi diversi.

Inizia a farsi strada un nuovo principio: ogni musicista sceglie l’opzione che gli permette di ottenere il guadagno maggiore.

Inizialmente, i due principi (monotonia, vantaggio) convivono o entrano in conflitto. Piano piano il principio del vantaggio prende il sopravvento.


Modello
Principio del vantaggio
Devono avere tutti di più di quanto andrebbero da soli […] però la differenza tra i guadagni deve essere sempre la stessa
Principio di monotonia
Organizzatore
Ada
Ciro
Situazione reale


Modello
però Ada e Bea guadagnano di meno e possono non starci
Principio del vantaggio
SCONTRO TRA PUNTI DI VISTA
Principio di monotonia
Ada
si, ma loro valgono di meno rispetto a Ciro


Modello
Una contrattazione non può essere accettata se uno dei tre musicisti può fare una proposta più vantaggiosa per sé e per un altro
Bea
Ada
Organizzatore
Ciro
Situazione reale

Le prime proposte iniziano ad essere messe in crisi nel momento in cui, sempre più spesso, gli studenti assumono il punto di vista di uno dei musicisti, esplicitando i suoi obiettivi e simulando un suo comportamento, e riuscendo allo stesso tempo a cambiare punto di vista

RUOLO DELL'INSEGNANTE: invitare gli alunni ad impersonare i diversi musicisti, promuovendo in questo modo l'assunzione di diversi punti di vista

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	**Bea**	**Ciro**
Equamente	200	200	200
Frazioni	140	209	251
Surplus	156,6	206,6	236,6
Surplus a Ciro	150	200	250

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	**Bea**	**Ciro**
Frazioni	140	209	251

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	**Bea**	**Ciro**
Frazioni	140	209	251
	170	**230**	

Ada può proporre a Bea di suonare solo con lei e di dividere i 400 euro tenendosi 170 euro e offrendone 230 a Bea.

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	**Bea**	**Ciro**
Frazioni	140	209	251
	170	**230**	180

Ada può proporre a Bea di suonare solo con lei e di dividere i 400 euro tenendosi 170 euro e offrendone 230 a Bea.

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	**Bea**	**Ciro**
Frazioni	140	209	251
	170	**230**	180
		235	**185**

Ada può proporre a Bea di suonare solo con lei e di dividere i 400 euro tenendosi 170 euro e offrendone 230 a Bea.

A questo punto, però, Ciro potrebbe proporre a Bea di suonare con lui dividendo i 420 euro (235 a Bea e 185 per sé) ….

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	**Bea**	**Ciro**
Frazioni	140	209	251
	170	**230**	180
	100	**235**	**185**

Ada può proporre a Bea di suonare solo con lei e di dividere i 400 euro tenendosi 170 euro e offrendone 230 a Bea.

A questo punto, però, Ciro potrebbe proporre a Bea di suonare con lui dividendo i 420 euro (235 a Bea e 185 per sé) ….

Il modello

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

x(A), x(B), x(C): ricavi rispettivamente di Ada, Bea e Ciro quando suonano insieme

$x(A) \geq 100$ $x(B) \geq 150$ $x(C) \geq 180$	$x(A)+x(B) \geq 400$ $x(A)+x(C) \geq 300$ $x(B)+x(C) \geq 420$	$x(A)+x(B)+x(C)=600$

ESEMPI

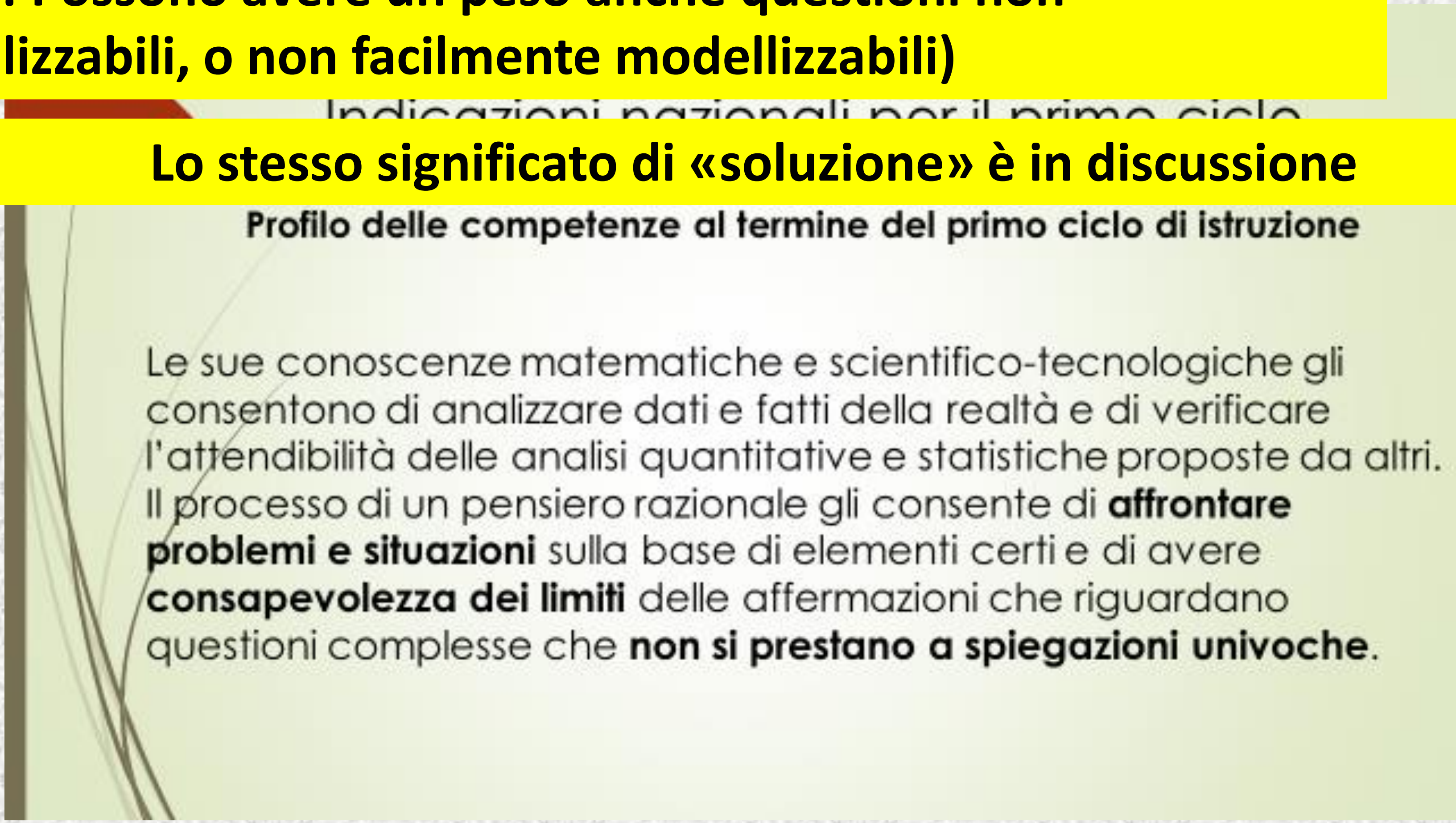
Ada	Bea	Ciro
170	240	190
115	300	185
…..	….	….
….	….	…

Problema dei musicisti

La matematica offre diversi strumenti per rispondere

La matematica ha dei limiti! Possono avere un peso anche questioni non matematiche (o non modellizzabili, o non facilmente modellizzabili)

Non c’è un’unica soluzione **Lo stesso significato di «soluzione» è in discussione**



Indicazioni nazionali per il primo ciclo

Profilo delle competenze al termine del primo ciclo di istruzione

Le sue conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche gli consentono di analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l’attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri. Il processo di un pensiero razionale gli consente di **affrontare problemi e situazioni** sulla base di elementi certi e di avere **consapevolezza dei limiti** delle affermazioni che riguardano questioni complesse che **non si prestano a spiegazioni univoche**.

Pensiero matematico

La discussione ha permesso l’emergere delle potenzialità e dei limiti delle diverse proposte e potenzialità e limiti dei modelli presentati sono state discusse e argomentate. La matematica, di base (certamente), è stata utilizzata come strumento per esplorare una situazione, modellizzarla, e ricavare delle possibili proposte di soluzione. Il pensiero matematico che soggiace ai processi di elaborazione dei modelli e della loro validazione non è (certamente) elementare, ma è possibile promuoverlo a tutti i livelli scolari.

Il Problema dei musicisti: trovare un buon accordo

Tre musicisti: Ada (cantante), Bea (pianista) e Ciro (violinista) vengono contattati pe suonare ad una festa. Potranno esibirsi: da soli, in coppia o in tre. Le ricompens stabilite dall'organizzatore dell'evento sono le seguenti:

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
da+Bea+Ciro			600

Mettendovi nei panni dei tre musicisti; provate a discutere l'offerta e spiegate in modo Ada, Bea e Ciro potrebbero accordarsi. Ricordatevi di motivare in modo adegu le vostre affermazioni!!

Il Problema dei musicanti: trovare un buon accordo

Tre musicisti: Ada (cantante), Bea (pianista) e Ciro (violinista) vengono contattati per suonare ad una festa. Potranno esibirsi: da soli, in coppia o in tre. Le ricompense stabilite dall'organizzatore dell'evento sono le seguenti:

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

Secondo te ad Ada conviene suonare da sola o in coppia con Bea? O in coppia con Ciro? Perché?

Accetterebbe Bea di suonare in trio e guadagnare 140 euro? Perché?

Una soluzione potrebbe essere dividere in tre parti uguali. Bea e Ciro accetterebbero? Perché?

Una soluzione potrebbe essere quella di dividere il guadagno in modo proporzionale al cache individuale. Sarebbe conveniente per tutti? Perché?

Eccetera…..

Il Problema d…

trovare u…

Abbiamo accompagnato lo studente passo-passo

…ti: Ada (cantante), … …ti per
… una festa. Potranno … …compense
…l'organizzatore dell'evento so…

Ada			1…
Ada+Bea+…			

Dove?

Perché?

Qual era l'obiettivo?

Secondo te ad Ada … Ciro? Perché?

Accetterebbe Bea di suonare in …

Una soluzione potreb… …o? Perché?

Una soluzione potrebbe essere quella di dividere il guadagno in modo proporzionale al cache individuale. Sarebbe conveniente per tutti? Perché?

Eccetera…..

Il Problema dei musicisti: trovare un buon accordo

Tre musicisti: Ada (cantante), Bea (pianista) e Ciro (violinista) vengono contattati pe suonare ad una festa. Potranno esibirsi: da soli, in coppia o in tre. Le ricompens stabilite dall'organizzatore dell'evento sono le seguenti:

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
da+Bea+Ciro			600

Mettendovi nei panni dei tre musicisti; provate a discutere l'offerta e spiegate in modo Ada, Bea e Ciro potrebbero accordarsi. Ricordatevi di motivare in modo adegu le vostre affermazioni!!

Un esempio alla secondaria di II grado

Esempio: una attività

PRODUZ/TRASF. DI ESEMPI ⟷ CONGETTURE ARGOMENTAZIONI

-Estensione del repertorio di esempi (familiarità con gli oggetti)

-Produzione e trasformazione di oggetti matematici

-Produzione di congetture, argomentazioni, dimostrazioni

IL CONTESTO

Due classi quinte di un Liceo Scientifico tradizionale

Attività svolta all’interno di una normale programmazione didattica
Periodo: marzo

Precedentemente trattati in modo tradizionale: concetto di funzione, dominio, limiti e derivabilità

Verifica iniziale

- Fai un esempio [illegible] n dominio R e con 2 punti di non continuità.
- Fai un esempio di una funz[illegible] dominio R e con 2 punti di non derivabilità.
- Fai un esempio di funzione definita [illegible] non continua nel punto $x=5$, tale che $f(5)=2$ e i limiti destro e si[illegible] r x che tende a 5 siano uguali.

DISASTRO !!

L’attività

•Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)

•Produzione di esempi non prototipici

•Produzione di esempi impossibili

•Trasformazione di esempi

•Riflessione sui processi

Fai l’esempio, se possibile, di 2 grafici di funzione e di 2 funzioni in forma algebrica per ognuno dei seguenti domini:

$(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$;[-1,5]; (-1,5); [-1,5); (-1,5]

- Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)

Fai l’esempio di 2 grafici di funzione e di 2 funzioni in forma algebrica**, i più strani possibile**, per ognuno dei domini seguenti

[-1,5]; (-1,5); [-1,5); (-1,5]; $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(5;+\infty\right)$

- Produzione di esempi non prototipici

•Produzione di “controesempi” a potenziali “enunciati impliciti”

Se possibile fai due esempi di funzione continua su [-3,4) senza massimo, almeno una anche limitata

Se possibile disegna 2 grafici di una funzione limitata inferiormente ma non superiormente, con dominio [0, +∞), senza asintoti verticali e per la quale non esiste il limite a +∞.

•Produzione di esempi non prototipici

Se possibile costruisci due esempi di funzione continua in [4,6] senza minimo.

- Produzione di esempi impossibili

1) Fai 2 esempi (in forma grafica e algebrica) di funzioni periodiche che verificano le seguenti proprietà:

- Non limitata;
- Limitata;
- Con periodo 5π.

2) Modifica le funzioni del punto 1) affinché diventino:

- Periodica di periodo 8π;
- Non periodica.

- Trasformazione di esempi

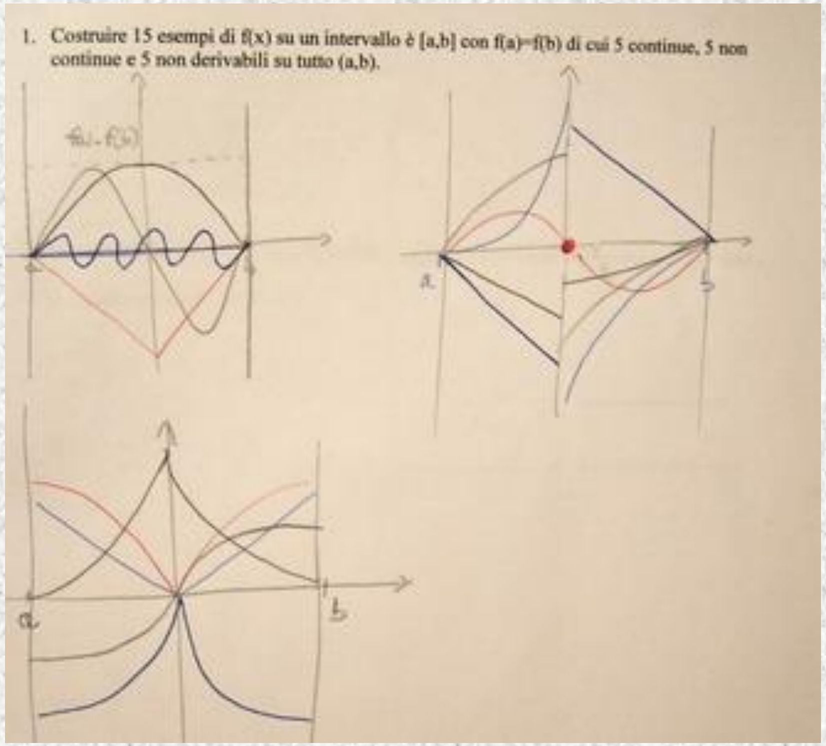
(dopo alcuni problemi)

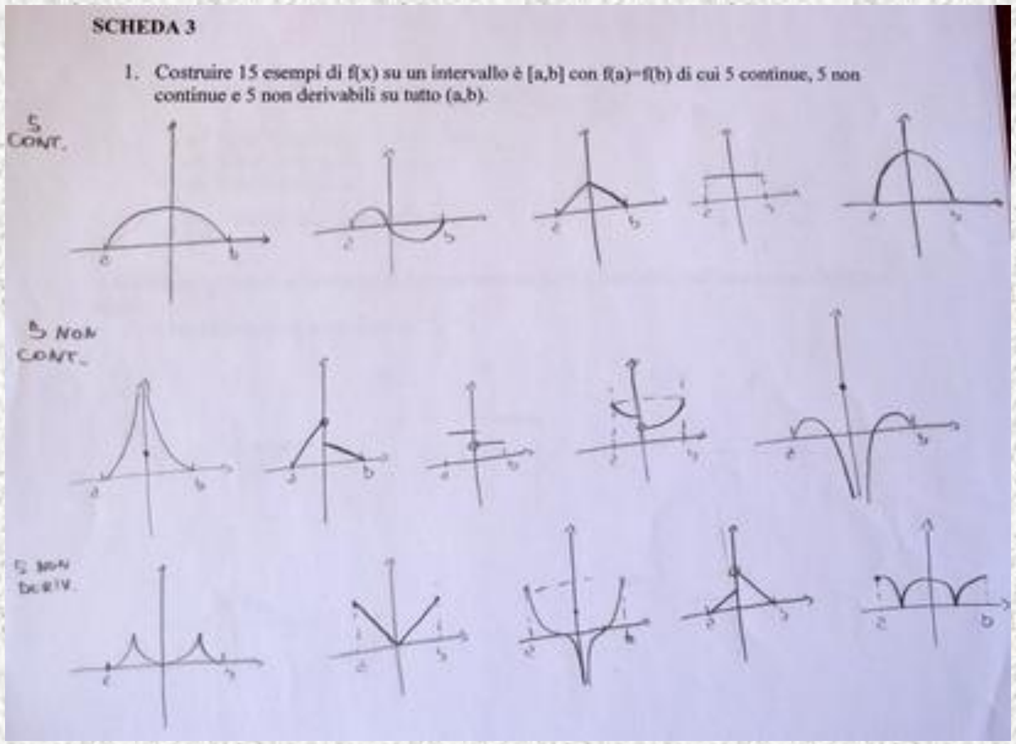
Descrivere il procedimento, spiegare ad uno studente di un’altra quinta liceo scientifico come hai fatto a trovare gli esempi di richiesti…..

- Riflessione sui processi

Dai processi di produzione di esempi alla congettura e argomentazione

Costruire 15 funzioni definite su un intervallo [a,b] tali che f(a)=f(b), di cui 5 continue, 5 non continue e 5 non derivabili.





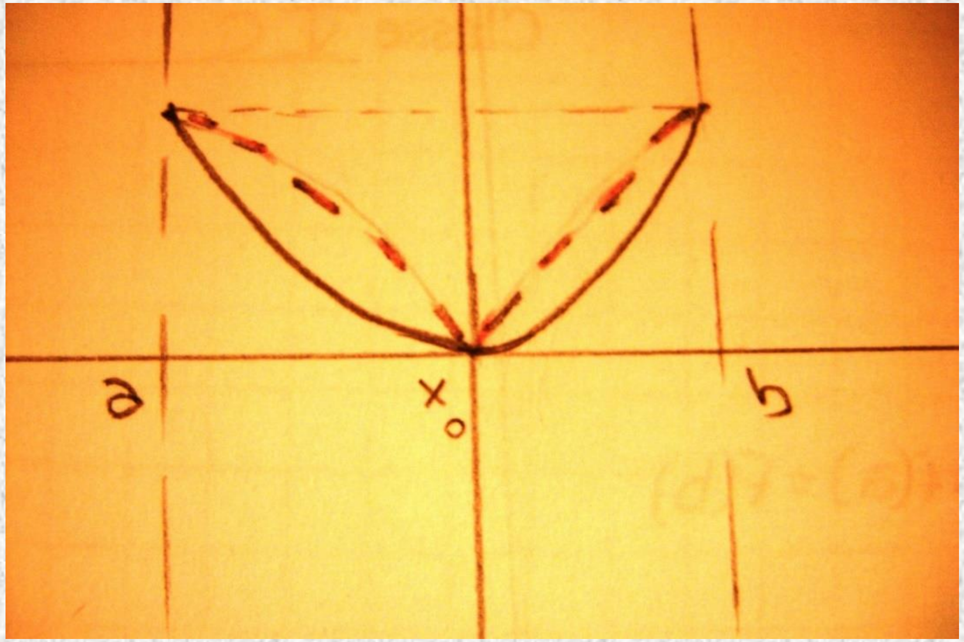
Dai processi di produzione di esempi alla congettura e argomentazione

Fai un esempio di $f(x)$ definita su $[a,b]$ con $f(a)=f(b)$ e:

a) $f'(x)>0$ su (a,b);
b) $f'(x)=0$ su (a,b);
c) $f'(x)<0$ su (a,b);
d) $f'(x)>0$ su $(a, (b+a)/2)$.

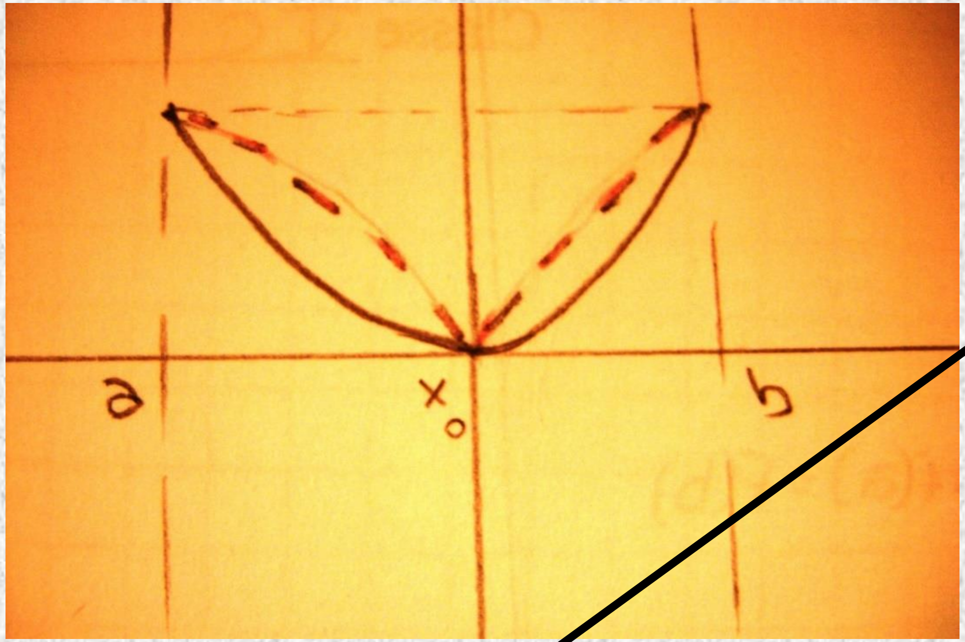
Costruisci, se possibile, una funzione f continua su [a,b] e derivabile sull'aperto (a,b) tale che f(a)=f(b) e f'(x) sia diversa da zero per ogni x.

Costruisci, se possibile, una funzione f continua su [a,b] e derivabile sull’aperto (a,b) tale che f(a)=f(b) e f’(x) sia diversa da zero per ogni x.



Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi nè minimi relativi ma deve avere f(a)=f(b). Non può essere un segmento parallelo all’asse x perché la derivata sarebbe 0.*

Costruisci, se possibile, una funzione f continua su [a,b] e derivabile sull’aperto (a,b) tale che f(a)=f(b) e f’(x) sia diversa da zero per ogni x.



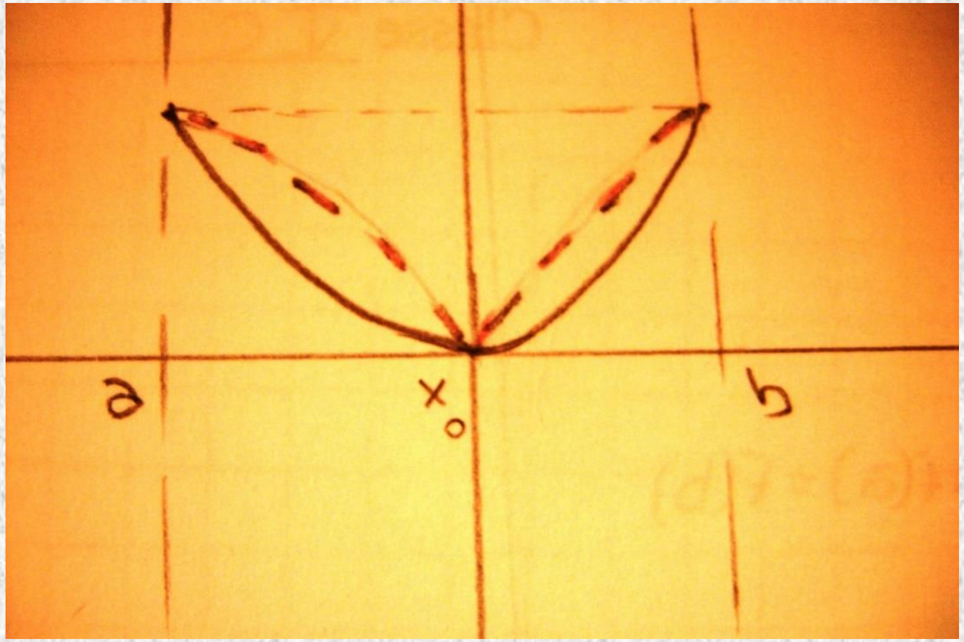
Non è possibile costruire l’esempio

Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi nè minimi relativi ma deve avere f(a)=f(b). Non può essere un segmento parallelo all’asse x perché la derivata sarebbe 0.*

Dimostrazione classica:

f costante

f non costante quindi max o min interno ad [a,b]



Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi nè minimi relativi ma deve avere f(a)=f(b). Non può essere un segmento parallelo all'asse x perché la derivata sarebbe 0.*

Cosa è la matematica?

Con «matematica» non si intende soltanto i contenuti matematici (il sapere) ma anche «le attività basate (in modo più o meno esplicito e consapevole a seconda di chi le svolge e delle circostanze in cui sono svolte) su elementi del sapere matematico: quindi, per noi la matematica comprende non solo i concetti e gli algoritmi matematici, ma anche le attività di matematizzazione, di problem solving, di produzione e di dimostrazione di congetture, ecc. da chiunque effettuate.» (Boero et al., 1995)

Università degli Studi di Napoli Federico II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Dipartimenti

Biologia

Fisica «E. Pancini»

Matematica «R. Caccioppoli»

Scienze Chimiche

Scienze della Terra, dell'ambiente e delle risorse

Piano Lauree Scientifiche

Scuola Estiva PLS di Formazione Docenti, NAPOLI, 16 luglio 2018

Argomentare e dimostrare: riflessioni epistemologiche, cognitive e didattiche

Samuele Antonini
Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia