PIANO LAUREE SCIENTIFICHE

LABORATORIO DI ALGEBRA E GEOMETRIA PER STUDENTI DEL QUARTO ANNO

a cura di

Sara Dragotti

Il laboratorio di Algebra e Geometria da me curato ha avuto lo scopo di mettere in risalto alcuni aspetti della Matematica che l'esperienza prova essere poco sottolineati nel percorso scolastico. Spesso tali aspetti vengono completamente ignorati.
Per fare ciò si è scelto di procedere con un inquadramento storico della disciplina, nel senso di indagine storica su alcuni concetti fondamentali, sulle motivazioni che ne hanno stimolato la nascita e su quelle che ne hanno accompagnato lo sviluppo, per costruire un linguaggio di base sui fondamenti.
Si è proceduto percorrendo a grandi linee i millenni che vanno dai primi segni di una ricerca "mirata" a tradurre matematicamente esigenze di vita quotidiana fino alla nascita della vera e propria disciplina con la matematica ellenica dei Pitagorici e dell'Accademia platonica. Con l'esposizione dell'opera di Euclide e della sua algebra geometrica ci si è fermati con lo sviluppo storico globale, e si è invece proseguito seguendo le vicende del mitico V postulato terminate nel XIX secolo con la nascita delle geometrie non euclidee e delle teorie assiomatiche.
Si è evitato di riportare aneddoti graziosi allo scopo di attirare l'attenzione e di far divertire. La matematica è bella e affascinante di per sé. Non ha bisogno di aggiunte artificiose per attrarre uno studente normale, e quindi normalmente dotato di innata curiosità.
Frequenti sono stati invece gli spazi di esercitazione ed i momenti di approfondimento e discussione, anche su questioni poste dagli stessi studenti.
I quattro lunghi incontri in cui si è articolato il lavoro hanno avuto un supporto di slides di cui è stata distribuita una copia stampata ai docenti delle scuole partecipanti.
Qui di seguito sono riportati, a titolo di esempi, tre "momenti" di questi incontri in maniera uguale nella sostanza, ma un po' diversa nel taglio e nell'esposizione. Ho pensato cioè di rivolgermi di più ai docenti, cercando di chiarire gli aspetti "nascosti" di cui parlavo sopra, tralasciando le precisazioni minute (che invece ho dovuto fare parlando agli studenti) a meno che esse non fossero indispensabili per seguire il filo del discorso.
Le idee e le considerazioni esposte sono ovviamente personali. Ogni insegnante può leggerle e, se ne condivide il senso, può prendere spunto da esse per la propria didattica.

Un primo esempio: l'alba prima dell'aurora

Sono stati trovati mucchi di pietre risalenti alla preistoria per cui studiosi competenti (geologi, archeologi, antropologi) hanno convenuto che, per la loro forma e disposizione, dovevano essere serviti per "contare". Ma contare come? e contare cosa?
Si può, ad esempio, ipotizzare che per ogni capo di un gruppo di animali condotti a pascolare venisse deposta una pietra, così da formare un mucchio. Al ritorno, quando gli animali venivano raccolti, si rifaceva l'abbinamento. La presenza di pietre residue segnalava lo smarrimento di qualche capo, che occorreva recuperare. Perdere una capra o una pecora per un gruppo di famiglie primitive non significava essere più povere. Significava perdere latte, carne, cibo essenziale per la sopravvivenza.

Un mucchio di pietre poteva anche misurare un intervallo di tempo, ad esempio quello tra due pleniluni. In un periodo in cui non si conosceva l'uso del fuoco era vitale stabilire quando la notte sarebbe stata più o meno illuminata e quando, invece, ci sarebbe stato il buio completo.
Un po' più in là nel tempo ci si rese conto che l'uso delle pietre, oltre che scomodo, era poco sicuro, perché i mucchietti potevano facilmente essere scomposti, non erano **conservabili**, ovvero non erano adatti a conservare con certezza le informazioni numeriche che contenevano. Si passò allora ad incidere tacche su un pezzo di legno o su un osso di animale. Per segnare cosa? O quantità di oggetti, o intervalli di tempo tra due eventi significativi. Un osso di lupo, ritrovato in Cecoslovacchia, presenta tacche disposte in due file. La prima fila contiene 25 tacche e la seconda ne contiene 30. Un'ipotesi molto plausibile sul significato delle due serie di tacche (suggerita dagli studenti del laboratorio) è che fossero riferite al ciclo periodico femminile. In tal caso la maggiore lunghezza della seconda fila avrebbe segnalato un concepimento. In altre parole l'osso potrebbe interpretarsi come un preistorico test di gravidanza.
Allo stesso periodo (più di 50000 anni fa, millennio più, millennio meno) risalgono disegni graffiati sulle pareti di caverne che rivelano il bisogno di stabilire relazioni spaziali tra i vari elementi raffigurati, ed inoltre resti di vasellame e altri manufatti con particolari che testimoniano una spontanea ricerca di simmetrie e di armonia di linee. Sono state anche trovate incisioni di disegni astratti con motivi geometrici, come quello a lato, ritrovato nella caverna di Blombos nel Sud Africa risalente, a detta degli esperti, a circa 70000 anni fa. Sono i primi segni di quella che, evolvendo, si sarebbe chiamata geometria.

Tutto ciò risale all'età della pietra, quando il linguaggio si stava appena formando, quando non si conosceva l'uso dei metalli e della ruota, quando della scrittura (lusso del 4000 a.C.) non c'era neanche l'ombra!
RACCONTARE questo ai ragazzi, in modo appropriato, non ha lo scopo di fare pettegolezzi sui nostri antenati. Serve a far capire come le prime tracce di quelle che oggi chiamiamo aritmetica e geometria siano molto più antiche di quanto si possa pensare, precedano di molto la nascita delle prime civiltà organizzate e siano motivate da elementari **esigenze di sopravvivenza** e dalla ricerca, a livello emozionale, di **armonia** e di **bellezza**.
È importante fare osservare come **contare** abbia significato in origine, così come oggi, mettere in corrispondenza biunivoca due **insiemi diversi**, uno dei quali più maneggevole. È un procedimento mentale di notevole astrazione. È l'idea moderna di **applicazione** o **funzione**.
È importante ancora sottolineare il passaggio dai mucchi di pietre alle tacche incise su un osso, perché sta ad indicare il passaggio alla **costruzione personale** dello strumento adatto a contare, e un ulteriore passaggio sancirà la nascita del concetto vero e proprio di numero intero. Ma per questo ci vorrà ancora molto tempo. Occorrerà aspettare il sorgere delle prime civiltà. Occorrerà aspettare che all'alba succeda l'aurora.

Un secondo esempio: il nome della "cosa"

È abbastanza noto agli studenti che più di 4000 anni fa gli antichi matematici babilonesi risolvevano equazioni algebriche di secondo e terzo grado, mentre quelli egizi si limitavano a quelle di primo. Ma cosa vuol dire esattamente questo? Non certo quello che intendiamo oggi. Allora non si poteva ad esempio scrivere $ax^2 + bx + c = 0$, perché non si conosceva l'uso dei simboli per le operazioni, né l'uso delle lettere per indicare le quantità note e quelle incognite, e, per finire, non esisteva nemmeno il termine "equazione", che compare per la prima volta

nel *Liber Abaci* di Leonardo Fibonacci del 1202. Si tratta dunque di dire che questi matematici trattavano problemi (necessariamente "specifici") che per noi si tradurrebbero nel cercare le soluzioni di una equazione algebrica di primo o secondo grado. Ma i metodi erano quelli della cosiddetta *algebra retorica*. I problemi venivano cioè esposti "con parole" ed anche le soluzioni erano descritte con parole in termini che ricordano le ricette di cucina: "prendi la metà di questo, moltiplica per quest'altro, aggiungi al tutto quest'altro ancora, …" e così via.
Presso gli egiziani la soluzione di una equazione di primo grado veniva cercata, in termini numerici, con il metodo di "falsa posizione", ossia azzardando un valore per quella che oggi chiamiamo incognita ed applicando successivamente un algoritmo di correzione dell'errore basato sull'idea di proporzione. Facciamo un esempio per chiarire.
Il problema 24 del papiro di Ahmes recita:

Trovare il valore del mucchio sapendo che il mucchio
e un settimo del mucchio sono uguali a 19.

In termini moderni il *mucchio* sarebbe l'indeterminata x. Cioè noi scriveremmo

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

Il metodo di falsa posizione viene applicato in questo caso assegnando al mucchio il valore 7 e calcolando il valore del primo membro. Si confronta il valore ottenuto, cioè 8, con 19 correggendo l'errore, ossia moltiplicando il valore azzardato 7 per $19/8$, rapporto tra il valore giusto del secondo membro e quello risultante dalla falsa posizione. Si ottiene così il giusto valore del mucchio: $7 \cdot 19/8$. Si tratta in sostanza di un ingegnoso miglioramento del metodo spontaneo di procedere "per tentativi".
In seguito, con la matematica greca dei pitagorici, e come largamente esposto negli *Elementi* di Euclide, subentra il metodo geometrico. L'incognita diventa, ad esempio, un segmento che viene determinato, con una costruzione geometrica con riga e compasso, utilizzando i risultati di proposizioni rigorosamente dimostrate. Il modo di esporre è sempre quello "a parole", e quindi ingombrante. Leggere ad esempio la proposizione 6 del secondo Libro degli Elementi comporta un notevole sforzo iniziale di comprensione:

> *Se un segmento viene bisecato e a esso viene aggiunto in linea retta un altro segmento, il rettangolo contenuto dall'intero (con il segmento aggiunto) e dal segmento aggiunto, insieme al quadrato costruito su metà del segmento bisecato, è uguale al quadrato costruito sul segmento formato da metà del segmento bisecato e dal segmento aggiunto.*

Questa proposizione, che Euclide dimostra con metodi strettamente geometrici, serviva ai geometri di quel tempo per risolvere quella che per noi è l'equazione $ax + x^2 = b^2$. Infatti, indicando con a il segmento dato e con x quello aggiunto, la proposizione 6 per noi si traduce nell'uguaglianza

$$(a + x)x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

da cui, essendo il primo addendo del primo membro uguale a b^2, si ricava che

$$\frac{a}{2} + x = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$$

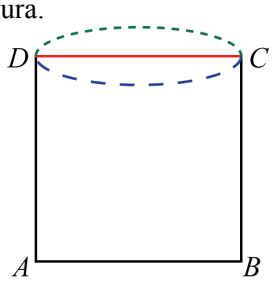
che fornisce per x la soluzione positiva della formula risolutiva odierna.
I metodi della cosiddetta *algebra geometrica* sono però ricchi di fascino, perché corredati da figure che hanno un notevole impatto di evidenza sintetica, ed il percorso che porta alla soluzione ha un sapore artigianale e il gusto suggestivo della ricerca dell'idea geniale appropriata.
C'è anche da dire che non tutti i problemi che si traducono in equazioni algebriche possono essere trattati in termini geometrici. Ad esempio Euclide non avrebbe potuto trattare l'equa-

zione $ax + x^2 = b$, perché, se a, x e b sono segmenti, ax è un rettangolo, x^2 è un quadrato e non ha senso che aggiungendo un quadrato a un rettangolo si ottenga un segmento, perché sono elementi disomogenei. Così pure c'è da dire che le soluzioni sono limitate a quelle che oggi diciamo reali positive, ma queste sono limitazioni ovvie.
Nel III secolo l'*Arithmetica* di Diofanto presenta una serie di problemi in termini puramente numerici. Non costituisce un passo in avanti dal punto di vista di una trattazione sistematica, ma la sua impostazione molto astratta favorisce l'uso di abbreviazioni per le operazioni che consentono di scrivere i polinomi in forma concisa, quasi quanto quella attuale, e compare la lettera σ per indicare l'incognita. In altre parole c'è un primo barlume della moderna *algebra simbolica*.
Nel IX secolo la matematica araba di al-Khuwarizmi segna il ritorno all'algebra completamente retorica e al metodo geometrico greco. Però c'è una organizzazione sistematica della trattazione, con una esposizione chiara e ben argomentata della risoluzione di equazioni per lo più di secondo grado. L'incognita viene chiamata "cosa".
Occorre arrivare alla fine del XVI secolo per trovare nell'opera del matematico francese Viète l'uso delle lettere per indicare sia le quantità note che quelle incognite. Questo consente la precisa espressione delle formule risolutive delle equazioni algebriche fino a quelle di quarto grado, che già erano state trovate dai matematici del Rinascimento italiano, nonostante la difficoltà dovuta alla mancanza di simbologia.
Nel XIX secolo viene chiusa la questione di vedere se la generica equazione di grado superiore al quarto sia "risolubile per radicali", ossia se le sue soluzioni siano ricavabili da una formula che utilizzi solo le quattro operazioni elementari e l'estrazione di radice applicate ai coefficienti della stessa (così come accade per quelle di grado fino al quarto). Il lavoro di Ruffini e Abel provò che ciò non è vero per "tutte" le equazioni di grado superiore al quarto. Ma quando è invece vero? Si può stabilire un criterio per dire se una equazione di grado maggiore di quattro sia o no risolubile? A questa domanda rispose il giovane matematico Évariste Galois introducendo un concetto nuovo, quello di **gruppo**.
A questo punto non si è potuto procedere oltre, perché ciò avrebbe richiesto da solo una metà del tempo del laboratorio. È stato solo detto che l'idea di **gruppo** circolava da tempo in forma embrionale nell'ambito della geometria in connessione con la studio delle simmetrie di una figura. Una volta formalizzata, tale idea ha dato origine ad una branca notevole dell'algebra detta appunto *Teoria dei Gruppi* che ha avuto sorprendenti applicazioni in molti settori scientifici, quali ad esempio la fisica delle particelle elementari e la cristallografia.
È UN PERCORSO da fare in maniera discorsiva, con qualche esempio chiarificatore, ma senza troppi dettagli, che finiscono per appesantire l'esposizione e distogliere l'attenzione.
Il discorso in questione mette in luce come la **formulazione pulita** di una teoria (*algebra simbolica*) non precede il suo studio, ma lo accompagna fino a rendersi indispensabile per lo sviluppo completo.
Mi spiego meglio. È difficile trovare formule risolutive quando si parla in termini di "un cubo e una cosa siano uguali a un numero" oppure "il cubo e sei volte il lato siano uguali a 20" per dire che $x^3 + 6x = 20$. Eppure fu lavorando in questa maniera, per noi terribile, che i matematici italiani del Rinascimento trovarono le loro formule.
È l'aspetto **pragmatico** del lavoro del matematico che viene fuori da questo discorso. La formalizzazione va vista quindi come la sistemazione che consente una visione sintetica della teoria, e ne agevola l'esposizione e l'uso dei risultati.
Tale sistemazione non è però fine a se stessa, perché favorisce l'**indagine su nuovi interrogativi**. Senza una visione generale dell'argomento non sarebbe stato infatti possibile ai matematici del XIX secolo ragionare nei termini astratti che consentirono da una parte di chiudere la questione della risolubilità per radicali e dall'altra di mettere a punto **strumenti nuovi**

(gruppi) attingendo in maniera **trasversale** ad altri settori della disciplina stessa (geometria) e favorendo lo sviluppo di settori scientifici anche diversi da quelli matematici.
Va infine sottolineato l'aspetto **corale** delle conquiste matematiche che non sono dovute all'opera di "geni" isolati, ma sono frutto del lavoro secolare di costruzione e limatura di studiosi, ciascuno dei quali ha contribuito nella maniera consentita dagli strumenti del suo tempo.

Un terzo esempio: una, nessuna e centomila

Per la matematica greca, almeno fino ad Euclide, un postulato non aveva il significato moderno di enunciato che non va dimostrato perché viene assunto per ipotesi e posto, con altri, alla base di una teoria. No. Un postulato era l'enunciato di una verità, di natura specifica, "evidente" e veniva scritto solo per ribadirne il contenuto e per usarlo nelle dimostrazioni delle proposizioni successive.
Il quinto postulato degli *Elementi* di Euclide, più noto come *postulato delle parallele*, non aveva lo stesso carattere di "evidenza" dei primi quattro. Lo stesso Euclide ne sembrava turbato, al punto che ne fece uso solo dopo molte proposizioni. È difficile che gli studenti si rendano conto di questa perplessità, perché ai ragazzi l'esistenza di una sola parallela condotta da un punto a una data retta è stata implicitamente data nel senso moderno di assioma, e loro "vedono" due rette "dritte" lunghe lunghe che non si incontrano. A riprova della giusta perplessità di Euclide (che fa onore al suo senso del rigore ed è indice di una certa modernità di pensiero) c'è il fatto che da subito dopo molti studiosi cercarono di provare che esso conseguiva dai primi quattro. Cercarono cioè di farlo diventare un teorema, senza riuscirvi. Dopo molto tempo cominciò a fare capolino l'idea di provarlo "per assurdo": *supponiamo che il quinto postulato non valga e vediamo cosa succede*.
Il più noto di questi tentativi è quello di Girolamo Saccheri dei primi decenni del 1700. Occorre a questo punto scendere più in dettagli (prelevandoli dalle slides) su cui appoggiare le considerazioni successive.
Con passaggi canonici si vede che il V postulato comporta che la somma degli angoli di un triangolo è pari a due retti, e quindi la somma degli angoli di un quadrilatero è pari a quattro retti. Se si nega il postulato, tale somma può essere inferiore o superiore a quattro retti. È questo il modo in cui G. Saccheri sviluppò il suo procedimento per assurdo, lavorando su un quadrilatero con due angoli retti e due lati opposti uguali (quadrilatero birettangolo isoscele) come in figura.



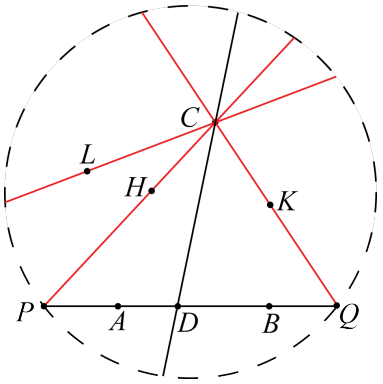
Senza utilizzare il V postulato provò che gli angoli in *C* e in *D* sono uguali. Essi allora possono essere:
a) acuti
b) retti
c) ottusi.

Esaminò poi i casi a) e c), contrari alla tesi di Euclide, per provare che ciascuno di essi portava ad una contraddizione. Nel caso a) trovò anche numerosi, interessanti ed armoniosi risultati, coerenti tra di loro, ma non con quelli euclidei. La profonda e cieca fiducia nell'opera di Euclide gli impedì di trarre le giuste conclusioni.
Ma i tentativi di Saccheri, e di altri dopo di lui, avevano aperto la strada proprio alla ipotesi di non dimostrabilità del quinto postulato ed all'idea **nuova** che **la validità di una geometria si fonda sulla sua non contraddittorietà logica e non sulla sua evidenza intuitiva**.
Nel XIX secolo il clima culturale è dinamico e fecondo.

Esigenza di **rigore logico** e ricerca di **universalità** preparano alla nascita dell'**impostazione assiomatica** delle varie discipline matematiche, ed alla ricerca di **modelli unificanti** interni alle varie scienze applicate.
Una maggiore flessibilità intellettuale rende possibile a due studiosi coraggiosi, in maniera indipendente l'uno dall'altro, di ridare all'opera di Euclide il suo giusto valore di modello di una **possibile** teoria geometrica, bella, comoda, maneggevole, ma **non unica**.
Si tratta del giovane ungherese Jànos Bòlyai, figlio di un amico di Gauss, e del matematico russo Nicolaj Ivanovic Lobacevskij. Quest'ultimo nel 1829 pubblica sulla Gazzetta di Kazan il saggio *Sui principi della geometria,* in cui al mitico quinto postulato euclideo sostituisce:

per un punto C fuori di una retta AB si può tracciare, nello stesso piano, più di una retta che non incontri la retta AB

e riesce a costruire una teoria geometrica armoniosa e priva di contraddizioni logiche. Il primo modello per tale geometria, detta *iperbolica*, fu fornito da E. Beltrami, ma di esso non parleremo. Descriveremo, invece, brevemente i più semplici modelli dati successivamente da F. Klein e H. Poincaré.
Nel modello di Klein il piano ambiente è costituito dai punti del piano euclideo interni ad un cerchio. Sono quindi esclusi i punti della circonferenza di bordo e tutti gli altri punti.

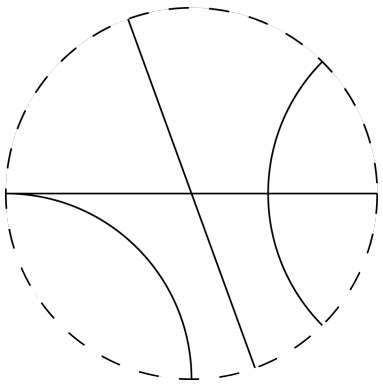


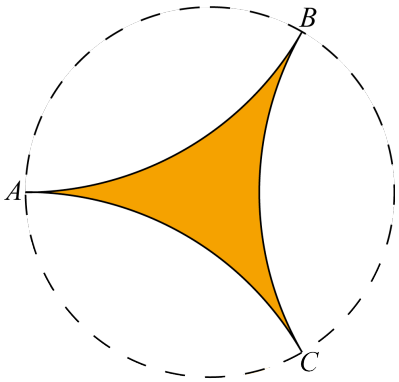
Le rette sono le corde, come ad esempio la *AB* (esclusi ovviamente gli estremi).
Per un punto *C* fuori di una retta *AB* si possono tracciare molte rette che non la incontrano, ovvero sono ad essa parallele.
La retta *CH* e la retta *CK* sono rette parallele ad *AB* perché i punti *P* e *Q* non appartengono al nostro piano.
La retta *CH* e la retta *CK* sono parallele limite, nel senso che separano le rette per *C* secanti *AB*, come la *CD*, dalle rette non secanti, ovvero parallele, come la *CL*.

Per questo piano valgono gli assiomi di Euclide tranne il quinto, e molti risultati purché non coinvolgenti la nozione di distanza. Klein sostituì allora la nozione di distanza euclidea con la seguente:

$$d(A,B) = \left|\log\left(\frac{AP}{AQ}\frac{BQ}{BP}\right)\right| \quad \text{con} \quad AP \le AQ$$

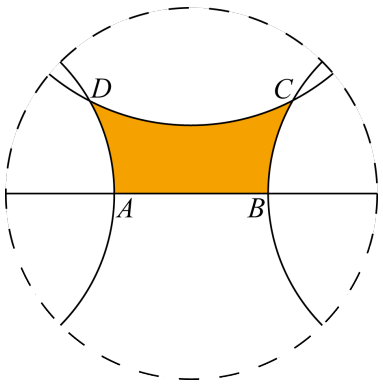
I punti del piano di Poincaré sono gli stessi del piano di Klein, ma le rette sono archi di circonferenze ortogonali al bordo del cerchio ambiente (nel senso che le due tangenti sono ortogonali), oppure sono diametri, come in figura.



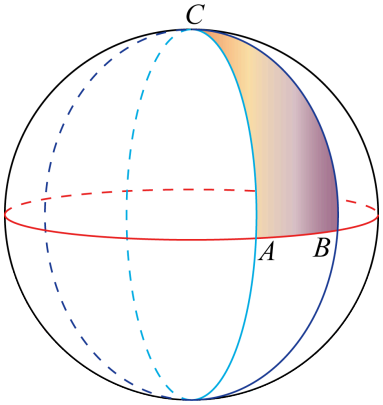


Il triangolo della figura a lato è un triangolo limite. I suoi lati infatti sono a coppie paralleli, perché i vertici non appartengono al piano di Poincaré.
La somma degli angoli di un triangolo è minore di due retti (in quello limite è addirittura zero).
Non esistono triangoli simili che non siano uguali.

Gli angoli in *C* e *D* del quadrilatero birettangolo isoscele di Saccheri sono ora visibilmente acuti.

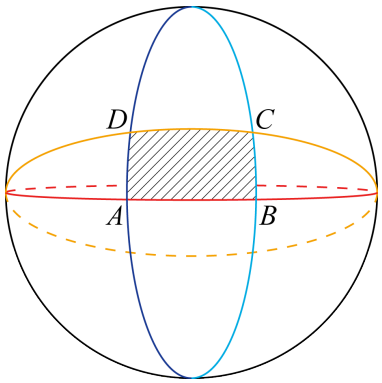


Nel 1854, per l'abilitazione alla docenza, G. F. Bernhard Riemann presentò all'Università di Gottinga una tesi dal titolo "*Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*". In essa sosteneva essere il concetto di **metrica** quello che determina il tipo di ambiente geometrico. Ad esso si può ricondurre il concetto di retta (come **geodetica)** e di **curvatura** di una superficie**.** L'ambiente piano diventa allora una superficie a curvatura costante **k,** e la geometria in esso sviluppata sarà quella *euclidea* se **k** è nulla, quella *iperbolica* se **k** è negativa, mentre se **k** è positiva si avrà una geometria detta *ellittica.* Si ottiene in tal modo una unificazione tra le nuove geometrie e quella euclidea.



Nel modello di Riemann i punti sono quelli di una superficie sferica dello spazio euclideo, e le rette sono le circonferenze massime, ossia le sezioni della superficie con un piano passante per il centro della stessa.
Non esistono rette parallele.
Per il triangolo *ABC* in figura, così come per ogni altro, la somma degli angoli è maggiore di due retti.

Nella geometria sferica non sempre è unica la retta per due punti distinti. Precisamente non è unica la retta per due punti antipodali. Se non si vuole rinunciare a questa proprietà valida nelle altre geometrie occorre vedere come un unico punto una coppia di punti antipodali, ovvero pensare al modello di una semisfera … con qualche altro ritocco.



L'idea di Riemann dello studio generale di uno spazio metrico curvo produce effetti che vanno molto al di là di questa, sia pur piacevole, unificazione di geometrie.
È l'idea che ha reso possibile ad Albert Einstein di organizzare la sua teoria. Lo spazio-tempo, ambiente della teoria della relatività generale, è infatti uno spazio semi-riemanniano di dimensione 4.
In conclusione (si fa per dire!) viene spontanea la domanda: ma è proprio necessario, per fare geometria, che i postulati siano "veri" nel senso di "evidenti"? Se fosse così, una sola delle tre possibili geometrie sarebbe "vera". E ancora ci si può chiedere: ma cosa vuol dire punto, cosa vuol dire retta? A quali enti "reali" dobbiamo fare riferimento? ed è proprio necessario fare ciò?
Sono domande spontanee, dette in maniera un pò ruvida, ma sono proprio la sintesi dei problemi e discussioni che portarono i matematici del XIX secolo alla formulazione "assiomatica" di varie teorie, tra cui la geometria.
Nel 1899 David Hilbert pubblica *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti della Geometria). In tale volume propone un sistema di una ventina di assiomi che riorganizzano in maniera moderna e rigorosa la geometria di Euclide. Non ci si chiede più cosa sia punto, cosa sia retta o altro. Sono termini primitivi soggetti solo alle proprietà e alle relazioni dettate dagli assiomi. Su questi ultimi non c'è da indagare se siano veri o falsi, ma solo sintatticamente corretti, coerenti e sufficienti a sostenere la teoria conseguente.
RACCONTARE quanto sopra agli studenti è piuttosto impegnativo, in quanto essi sono abituati a vedere la geometria come una serie di teoremi che stabiliscono proprietà di oggetti o "figure", la cui esistenza e la cui natura non vanno messe in discussione. Non sono preparati ad una geometria che **configura ambienti** e **stabilisce relazioni** in base a nozioni (quali, ad esempio, quella di metrica) di cui non esiste un esemplare unico, ma tanti e, a seconda dei casi, è conveniente usarne uno oppure un altro. Sono abituati ad una matematica fatta di regole rigide e confondono tale rigidità con il "rigore" proprio della disciplina. È giusto seguire rigorosamente le regole, ma queste ultime vengono stabilite **liberamente** in funzione dello scopo da raggiungere, curando solo che siano sensate e non contraddittorie. L'universo non è né euclideo né riemanniano. L'universo è l'universo e basta. Ma per A. Einstein è stato più conveniente organizzare la sua teoria della relatività utilizzando una geometria di Riemann. Infatti, nonostante la costruzione iniziale sia meno familiare di quella euclidea e quindi più laboriosa, tale geometria si rivela vantaggiosa, in quanto le formule coinvolte risultano più sintetiche e maneggevoli.
In conclusione gli studenti spesso (quasi sempre?) ignorano l'aspetto **costruttivo**, **creativo** della geometria e della matematica più in generale. Un discorsino in merito è quindi essenziale, utilizzando l'esempio delle geometrie non euclidee o anche altri.

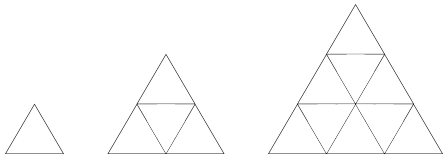
Gli spazi di esercitazione

Le esercitazioni hanno avuto lo scopo di chiarire con esempi quanto era stato esposto, ripercorrendo, ad esempio, alcune dimostrazioni classiche, ma lasciando agli studenti il tempo per pensare da soli ed intervenendo su richiesta con qualche piccolo suggerimento.
Ci si è soffermati, ad esempio, sulle dimostrazioni euclidee della non razionalità della radice di 2 e della non finitezza dell'insieme dei numeri primi.
A proposito dell'affermazione di Euclide: *il tutto è maggiore della parte*, si è discusso sull'esistenza di grandezze che, pur essendo contenute una nell'altra, sono, insiemisticamente, in corrispondenza biunivoca, come due segmenti.
Sono state anche messe in rilievo alcune parti dell'insieme dei numeri naturali che sono ad esso equipotenti: i pari, i dispari, i quadrati, …, e si è anche ricavata la legge che consente di "contare" tali parti, tipo $f(n) = 2n$, $f(n) = 2n - 1$, $f(n) = n^2$, … Si sono anche "contati" gli interi, i razionali, e si è visto che non si possono "contare" i reali (diagonale di Cantor). Questo discorso sulle potenze infinite (che non era previsto) ha entusiasmato i ragazzi. Dal primo sgomento alla notizia che i pari sono "tanti quanti" tutti i naturali si è passati al momento in cui si sono talmente impadroniti del significato di contare da scoprire modi diversi di contare uno stesso insieme, facendo quindi un uso spontaneo della composizione di applicazioni. Alla fine uno studente mi ha chiesto se era vero che un sottoinsieme infinito dei numeri naturali si poteva sempre contare, ed ha giustificato questa sua intuizione con una versione rozza della dimostrazione corretta del fatto che quella dei naturali è la "più piccola" potenza infinita. Sono rimasta piacevolmente stupita e gratificata.
Si è discusso sulle delicate definizioni eudossiane di rapporto di grandezze e di uguaglianza di rapporti, adottate da Euclide, e su come esse evitino i problemi connessi alla incommensurabilità.
Si sono confrontate alcune proposizioni di Euclide trattate con gli strumenti della cosiddetta *algebra geometrica* con quelle attuali, mettendo in risalto come l'uso della moderna *algebra simbolica* semplifichi sia l'esposizione di un problema che la sua risoluzione (però certe dimostrazioni degli *Elementi* hanno un sapore di ingegnosa costruzione manuale ed una suggestione pittorica di indubbio fascino).
Si è inoltre dato spazio a questioni nate sul momento da osservazioni spontanee di qualche studente. Ciò in base alla mia personale opinione che un'idea, un'intuizione sia sempre preziosa e debba essere colta al volo e curata, perché un laboratorio deve avere la possibilità di respirare liberamente e di uscire, se si presenta l'occasione, da schemi preordinati.

Possibili percorsi di indagine e temi di riflessione

1) La simmetria come linguaggio spontaneo di bellezza "utile":
   - simmetria di gruppi di note, di temi ricorrenti che creano l'armonia di una composizione musicale;
   - simmetria e giochi di simmetrie presenti in alcuni edifici architettonici o nella disposizione degli elementi di un dipinto o di una scultura;
   - simmetria presente nella natura nel momento in cui crea le sue forme viventi o inanimate (vedi cristalli, vedi cellette degli alveari).

   In una caverna sono stati ritrovati, graffiati su una parete, intorno al 25000 a.C., i disegni riportati nella figura a lato.
   Cosa ci dicono?



2) Le equazioni algebriche: il metodo egizio della falsa posizione, il metodo geometrico di Euclide e degli arabi, …, Tartaglia, Cardano, …, Abel, Galois.

3) L'influsso del pensiero cosmologico pitagorico nello sviluppo dell'astronomia: il fuoco centrale di Filolao, l'eliocentrismo di Aristarco, …, Copernico, Keplero, Galilei, …
4) La definizione eudossiana di rapporto: si dice che due grandezze sono in rapporto se esiste un multiplo di ciascuna di esse che supera l'altra.
5) Il problema degli infinitesimi: il metodo di esaustione di Eudosso-Archimede, il metodo degli indivisibili di Cavalieri, …, il calcolo infinitesimale, Newton, Leibniz, Weierstrass, Cauchy.
   Un percorso che dimostra come il matematico debba ricercare il rigore ma occorre anche un certo pragmatismo.
6) Sezione aurea, rapporto aureo, numeri di Fibonacci.

BIBLIOGRAFIA

[1] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Oscar Saggi Mondadori

[2] Michela Fontana, *Percorsi calcolati*, Le Mani