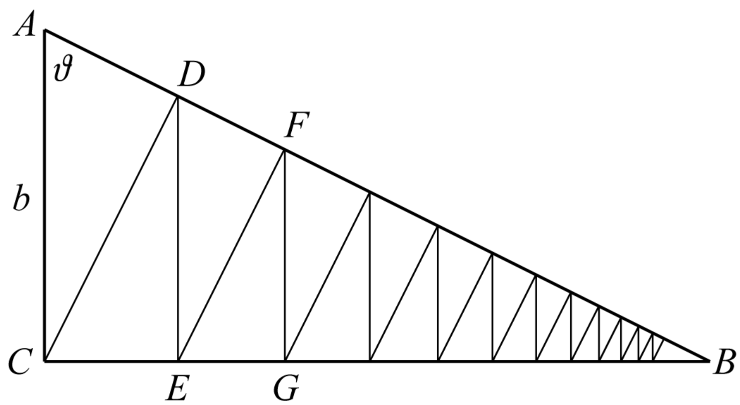
PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
10 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 1

Calcolare la lunghezza totale della spezzata disegnata in figura e che congiunge i punti C, D, E, F,... con $b = 1$ e $\vartheta = \frac{\pi}{3}$.



ESERCIZIO n. 2

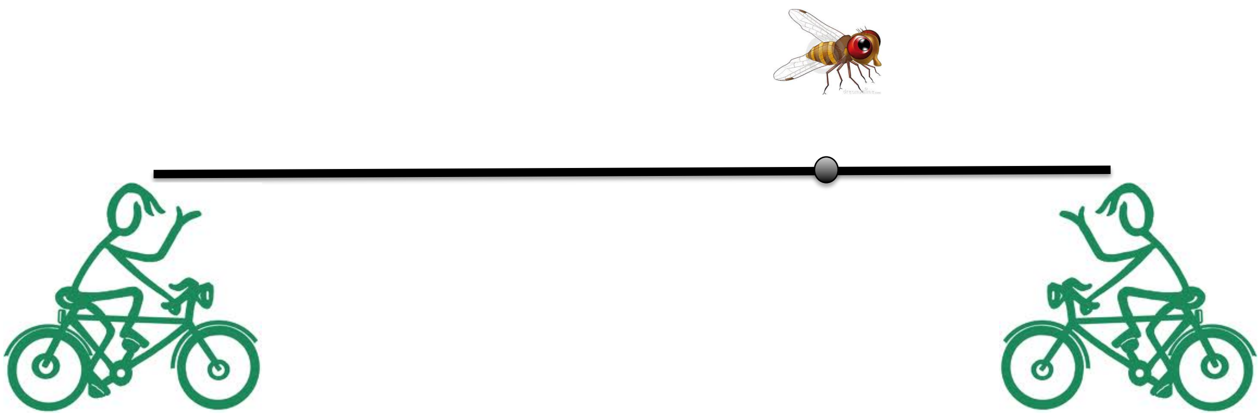
$i)$ Scrivere la frazione generatrice di $3,\overline{24}$.

$ii)$ Quanto vale $1,\overline{9}$?

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
10 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 3

Due ciclisti distanti tra loro 100 chilometri vogliono incontrarsi. Partono contemporaneamente e si muovono entrambi a 10 km/h. Nel medesimo istante una mosca lascia la prima bicicletta e vola verso la seconda a 20 km/h. Una volta giunta e posatasi sulla seconda bicicletta, riparte alla stessa velocità per tornare a posarsi sulla prima. La mosca continua a volare dall'una all'altra bicicletta finchè i due ciclisti si incontrano.



i) Verificare che ogni volta la mosca percorre $\frac{2}{3}$ della distanza tra le biciclette.

ii) Quanti chilometri ha percorso in totale la mosca?

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
10 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 4

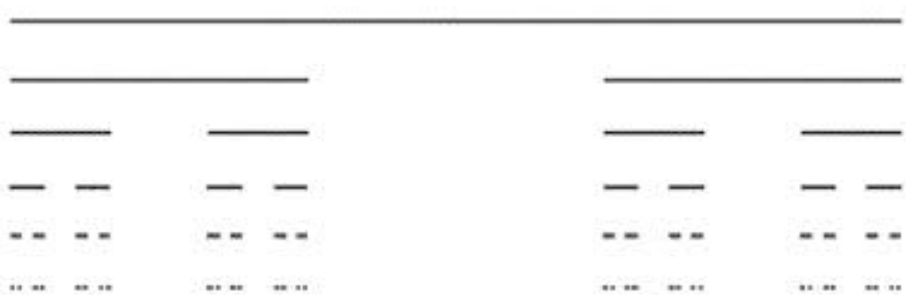
L'insieme di Cantor può essere costruito nel modo seguente.

Passo 0. Prendere un segmento di lunghezza 1.

Passo 1. Dividere il segmento in tre segmenti uguali.

Passo 2. Rimuovere il segmento centrale.

Passo 3. Ripetere i passi 1-2 su ogni nuovo segmento.



L'insieme di Cantor è l'insieme che si ottiene con infinite iterazioni, rimuovendo ad ogni passaggio solo il segmento centrale che si forma nella suddivisione di ciascun segmento in 3 segmenti più piccoli; dunque, in definitiva, l'insieme di Cantor è costituito dalla parte nera che rimane in figura, dopo infinite iterazioni.

i) Calcolare la lunghezza delle parti bianche dopo 1, 2, 3 iterazioni.

ii) Quanto vale la lunghezza dell'insieme di Cantor?

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
10 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 5

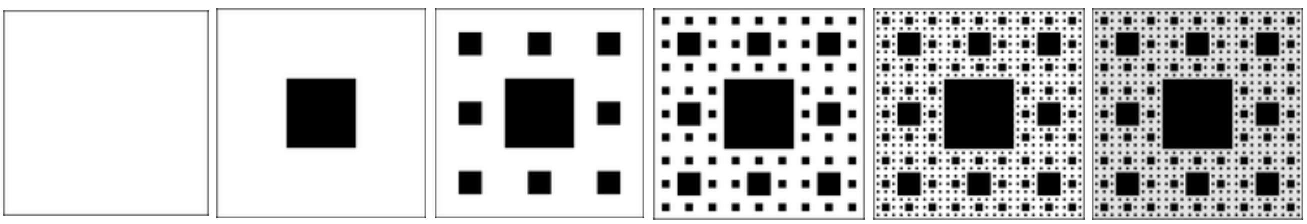
Il tappeto di Sierpinski può essere costruito nel modo seguente.

Passo 0. Prendere un quadrato di lato 1.

Passo 1. Dividere il quadrato in 9 quadrati più piccoli, ottenuti dividendo ogni lato in tre parti uguali.

Passo 2. Rimuovere il quadrato centrale.

Passo 3. Ripetere i passi 1-2 su ogni nuovo quadrato.



Passo 0 Passi 1-2 Passo 3

Il tappeto di Sierpinski è l'insieme che si ottiene con infinite iterazioni, rimuovendo ad ogni passaggio solo il quadrato centrale che si forma nella suddivisione di ciascun quadrato in 9 quadrati più piccoli; dunque, in definitiva, il tappeto di Sierpinski è costituito dalla parte bianca che rimane in figura, dopo infinite iterazioni.

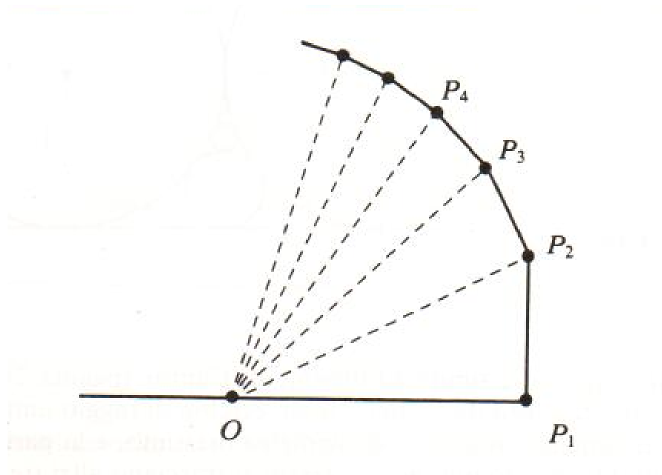
i) Calcolare l'area delle parti nere dopo 1, 2, 3 iterazioni.

ii) Quanto vale l'area del tappeto?

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
10 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 6

Costruire la spezzata P_1, P_2, ..., P_n, ... ove $OP_1 = 1$, $P_nP_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, $n = 1, 2, ...$ e gli angoli $\widehat{OP_nP_{n+1}}$ sono tutti retti ed orientati nello stesso verso.



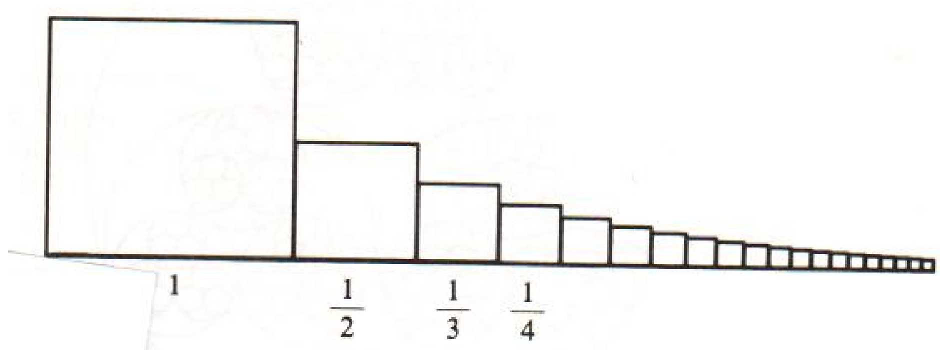
i) Stabilire se la distanza del punto P_n dall'origine O si mantiene limitata al crescere di n.

ii) Stabilire se l'angolo $\widehat{P_1OP_n}$ cresce indefinitamente o meno.

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
10 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 7

Considerare una successione di quadrati disgiunti di lato $\dfrac{1}{n}$, $n = 1, 1, 2, ...$



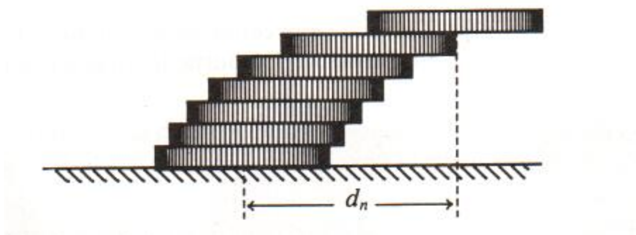
i) Verificare che l'area totale è finita.

ii) Dimostrare che è possibile inscatolare tutti tali quadrati dentro un quadrato di lato 1 senza sovrapporli né tagliarli.

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
10 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 8

Su un tavolo orizzontale vi è una pila di n monete uguali.



Assumiamo come unità di misura il loro raggio. Provare che è possibile disporre le monete nella pila in modo che esse siano in equilibrio e che la distanza d_n fra le verticali passanti per il centro della moneta più bassa e di quella più alta risulti

$$d_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}.$$

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
10 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 9

Sia $x > 0$; da quanto sappiamo sulla serie geometrica risulta

$$x + x^2 + ... = \frac{x}{1-x}$$

ed anche

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ... = \frac{1}{1 - 1/x} = \frac{x}{x-1}.$$

Sommando otteniamo la seguente formula (attribuita ad Eulero)

$$... + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + ... = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{1-x} = 0.$$

Dov'è l'errore?

ESERCIZIO n. 10

i) È vero che le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \qquad \sum_{n=100}^{+\infty} a_n$$

hanno lo stesso carattere?

ii) Calcolare le somme delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
10 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 11

La serie
$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...,$$
che può essere scritta nel seguente modo
$$(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + ...,$$
è la serie geometrica di ragione -1, pertanto
$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... = \frac{1}{2}.$$
Ma
$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0.$$
Come è possibile?

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
24 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 1

Un aereo sta percorrendo con velocità costante una traiettoria rettilinea che dista 7000 metri da un radiofaro. Nel momento in cui la distanza dell'aereo dal radiofaro è di 25 km, tale distanza aumenta di 180 m al secondo. Dire qual è in km/h la velocità dell'aereo.

ESERCIZIO n. 2

La velocità di un grave è proporzionale a $\sqrt{x}$ nell'istante in cui ha percorso uno spazio x. Provare che il grave si muove di moto uniformemente accelerato.

ESERCIZIO n. 3

Sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia $x_0 \in [a, b]$.

i) È vero che se x_0 è un punto di minimo o massimo, allora $f'(x_0) = 0$?

ii) È vero che se $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di minimo o massimo per f?

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
24 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 4

Data una circonferenza Γ di raggio R e centro nel punto $(a, 0)$, con $0 < a < R$, vogliamo determinare il punto $P(x, y) \in \Gamma$ che minimizza la distanza d dall'origine o, equivalentemente, il suo quadrato d^2. Poiché l'equazione della circonferenza è $(x - a)^2 + y^2 = R^2$, la funzione da minimizzare è

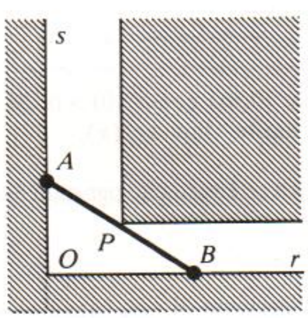
$$d^2(x) = R^2 - a^2 + 2ax.$$

La derivata di $d^2(x)$ rispetto ad x non ammette zeri. Come mai?

ESERCIZIO n. 5

Trovare la massima lunghezza di una scala a pioli che può essere trasportata attraverso un cunicolo ad angolo retto come quello raffigurato.

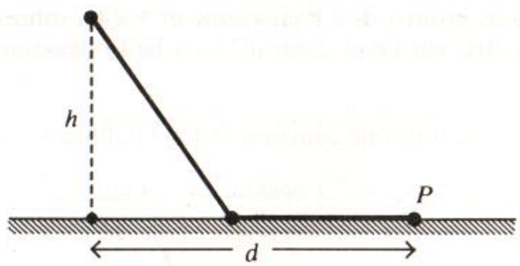
(**Suggerimento:** il problema può essere riformulato nel modo seguente. Sia P un punto interno ad un angolo retto rOs, a distanza a dalla semiretta s ed a distanza b dalla semiretta r. Qual è la minima lunghezza di un segmento AB con A su s, B su r, e che contiene il punto P?)



PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
24 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 6

Un tale si trova in barca a distanza h da un tratto di costa rettilinea. La sua velocità di spostamento a remi è v, mentre a piedi è v'. Egli deve raggiungere un punto P sulla linea di costa che dista d dal punto della costa di minima distanza dalla barca.
Determinare il percorso di tempo minimo, al variare dei parametri d, h, v, v'.



ESERCIZIO n. 7

I dirigenti di una fabbrica di birra si accorgono che le loro lattine costano troppo. Dovendo conservare la forma cilindrica, il materiale adottato e la superficie totale, decidono di agire sulle dimensioni delle lattine cercando di massimizzare il loro volume (e quindi la quantità di birra contenuta). Come devono scegliere altezza e raggio di base in modo che il volume risulti massimo tenendo costante la superficie totale?

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
24 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 8

Fra i rettangoli di perimetro fissato determinare quello di area massima.

ESERCIZIO n. 9

Fra i triangoli isosceli di perimetro fissato determinare quello di area massima.

ESERCIZIO n. 10

Fra i rettangoli di area fissata determinare quello avente diagonale minima.

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
24 febbraio 2016

ESERCIZIO n. 11

Fra i settori circolari di perimetro fissato determinare quello di area massima.

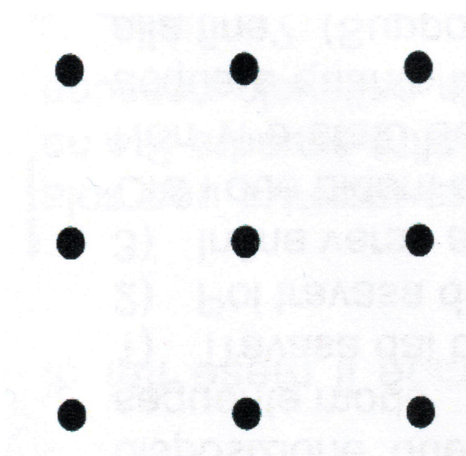
ESERCIZIO n. 12

Decomporre un numero nella somma di due in modo che la somma dei quadrati risulti minima.

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
3 marzo 2016

ESERCIZIO n. 1

I nove punti rappresentati in figura sono distribuiti in un reticolo quadrato 3×3. Sapete congiungerli (senza staccare la matita dal foglio e senza percorrere due volte lo stesso tratto) con una spezzata che comprenda il minor numero di segmenti?



ESERCIZIO n. 2

Una comitiva di 20 persone in cui ci sono uomini, donne e bambini, parte per una passeggiata. Dovendo trasportare cibarie, indumenti ed attrezzature per il picnic, per un totale di 40 kg, viene deciso che ogni uomo porterà uno zaino da esattamente 6 kg, ogni donna uno zaino da esattamente 3 kg ed ogni bambino uno zaino da esattamente 1 kg. Come è composta la comitiva?

ESERCIZIO n. 3

Tre soci costretti a chiudere il loro negozio vogliono dividersi equamente le 21 botti di vino restate in cantina, di cui 7 vuote, 7 piene e 7 piene per metà. Come fare senza versare neppure una goccia di vino, perchè a ciascuno tocchi la stessa quantità di botti e di vino?

ESERCIZIO n. 4

Considerate una successione di numeri interi positivi , tale che ogni numero dal terzo in poi sia la somma di tutti quelli che lo precedono, il primo numero sia 1 e l'ultimo sia 1000. Nella più lunga successione che si può costruire con questa legge, quanto vale il secondo numero?

PLS - Matematica 2015/16
Autovalutazione di Introduzione all'Analisi Matematica
3 marzo 2016

ESERCIZIO n. 5

Una scatola di latta contiene 100 caramelle. Di queste 28 sono alla fragola, 20 alla menta, 12 al limone, 20 all'arancia, 10 al miele e 10 alla liquirizia. Se estrete le caramelle al buio, qual è il minimo numero di caramelle che vi basta estrarre per essere sicuri di averne almeno 15 dello stesso gusto?

ESERCIZIO n. 6

Un canguro fenomenale si sposta saltando in linea retta da Trieste a Mosca (le due città distano circa 2500 Km) e ogni salto è lungo il doppio del salto precedente. Se il primo salto è lungo 1 metro, dopo quanti salti il canguro sarà il più vicino possibile a Mosca?

ESERCIZIO n. 7

Marco, che sta aggiornando sulla sua vita un amico che non vede da anni, gli dice: "Ho avuto tre figlie, nate tutte in maggio; il prodotto delle loro età è 36 e la somma delle loro età è il numero che vedi su quella casa gialla lí all'angolo. Indovina: quanti anni ha ciascuna?". L'amico riflette un attimo e dice: "Veramente mi manca un dato". E l'altro subito aggiunge: " vero, dimenticavo di dire che la più grande ha gli occhi azzurri". A quel punto l'amico dice le tre età esatte. Quanti anni hanno le tre figlie di Marco?

ESERCIZIO n. 8

Avete una tanica piena di acqua: in tutto sono 8 litri che volete dividere esattamente a metà, ma avete a disposizione solo una tanica da 5 litri ed una da 3. Qual il minimo numero di travasi da fare?

ESERCIZIO n. 9

Presi 5 interi qualsiasi, è sempre possibile trovarne 3 la cui somma è un multiplo di 3?

ESERCIZIO n. 10

Supponete, per comodità, che una moneta da 2 euro pesi 10 grammi. Avete davanti a voi 10 sacchetti di monete da due euro: ciascuno contiene dieci monete e proviene da un paese di Eurolandia diverso da quello da cui provengono tutti gli altri. Vi hanno detto che uno dei sacchetti , ma non sapete quale, contiene in realtà 10 monete false, ciascuna delle quali pesa 9,9 grammi invece di 10. Come potete riconoscere il sacchetto di monete false, se avete a disposizione una bilancia elettronica con sensibilità fino ai decigrammi, ma potete fare una sola pesata (anche nel senso che non potete aggiungere o togliere sacchetti o monete dal piatto)?