Il laboratorio è strutturato in quattro incontri destinati a studenti di III e IV anno di scuola superiore.

I) Il primo incontro si apre con una serie di esperimenti con bolle e lamine di sapone. Gli studenti sono inizialmente invitati a rispondere al semplice quesito: perchè le bolle di sapone hanno forma sferica? Quindi sono guidati in una serie di esperienze che permettono loro di riconoscere alcune propietà matematiche caratteristiche degli oggetti osservati ed a legarle alle note leggi di Poisson. Vista la difficoltà dell'argomento, l'incontro si chiude con una discussione di tipo metodologico su come sia possibile ricondurre un problema matematico difficile da affrontare ad uno più semplice introducendo nuove idee e nuovi strumenti. Per meglio chiarire questa idea, nell'ultima ora dell'incontro gli studenti sono guidati nella dimostrazione del porisma di Steiner.

   Di seguito vengono riportati gli esperimenti e gli esercizi proposti agli studenti.

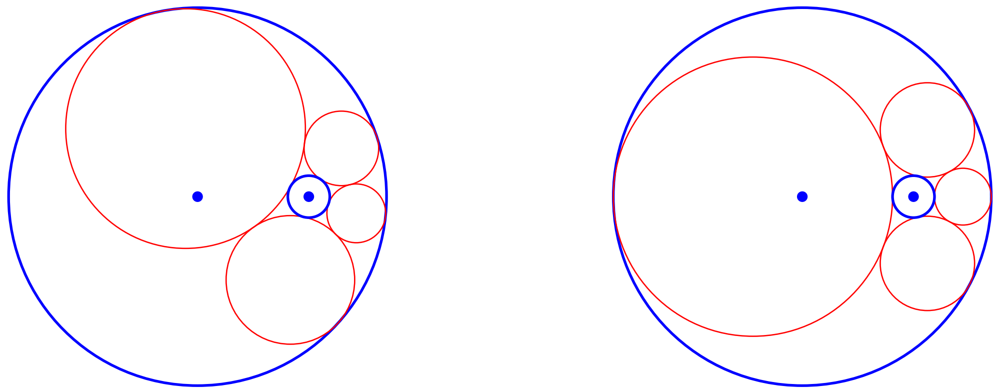
Lista degli esperimenti

1. Perché le bolle sono sferiche? Che forma hanno le semibolle?
2. Lamine saponate: immergere il telaio circolare con filo, sollevare parallelamente alla superficie dell'acqua e rompere una delle due porzioni di lamina. Che forma assume il filo?
3. Lamine saponate: immergere i bastoncini con filo di lana e sollevare parallelamente alla superficie dell'acqua, quindi allontanare i bastoncini. Che forma assumono i contorni liberi della lamina?
4. Lamine saponate: immergere il telaio circolare con cappio, rompere la lamina all'interno del cappio. Che forma assume il filo?
5. Lamine saponate: immergere il telaio costituito di due cerchi paralleli. Quale superficie osserviamo?
6. Lamine saponate: selle?
7. Percorsi minimi: immergere i telai costituiti dalle lamine di plexiglass parallele e misurare gli angoli formati dalle lamine.
8. Bolle: con le cannucce fare più bolle vicine su un foglio ed osservare gli angoli che esse formano.
9. Immergere il telaio a forma di tetraedro ed osservare la superficie minima.
10. Immergere il telaio a forma di cubo ed osservare la superficie minima.

ESERCIZIO n. 1 (2018) *Il porisma di Steiner*

Siano Γ_R e Γ_r due circonferenze di raggi R e r $(R > r)$, interne una all'altra, non tangenti. Sia poi γ_1 una circonferenza tangente sia a Γ_R sia a Γ_r. Consideriamo una circonferenza γ_2 tangente a Γ_R, Γ_r ed anche a γ_1. Prendiamo quindi una circonferenza γ_3 tangente a Γ_R, Γ_r e γ_2, e così via. Diciamo che la "catena" $\gamma_1, \gamma_2, ...$ si chiude se esiste un numero naturale n tale che γ_n sia tangente a γ_1 e $\gamma_{n+1} = \gamma_1$.

Una catena con le proprietà sopra indicate è detta *catena di Steiner*.



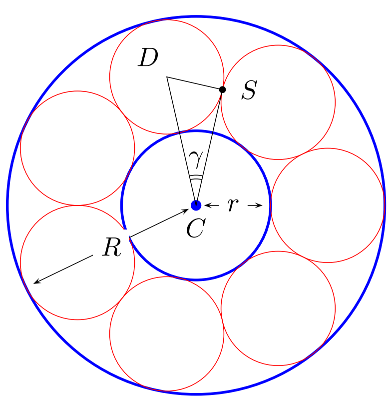
i) Se la catena si chiude, la posizione iniziale di γ_1 è importante o il fatto che la catena si chiuda dipende solo dalle posizioni di Γ_R e Γ_r?

ii) Se la catena si chiude e modifichiamo la posizione iniziale di γ_1, la figura finale cambia ed i raggi di tutte le circonferenza della catena variano oppure no?

iii) Supponiamo che Γ_R e Γ_r siano concentriche. Quale caratteristica comune hanno le circonferenze di una catena di Steiner?

iv) Siano Γ_R e Γ_r due circonferenze concentriche. Stabiliamo quale legame deve intercorrere tra i raggi R, r ed il numero n di circonferenze di una catena affinchè questa si chiuda. A tal fine consideriamo la figura seguente e calcoliamo:

1. l'ampiezza dell'angolo CSD;
2. l'ampiezza dell'angolo γ;
3. la lunghezza del segmento DS;
4. la lunghezza del segmento CD.

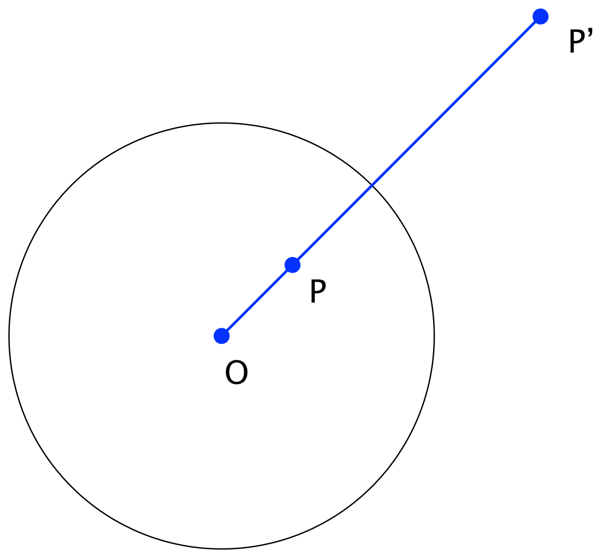


Concludiamo il ragionamento applicando il teorema dei seni al triangolo CSD.

ESERCIZIO n. 2 (2018) ***Inversione di un punto rispetto ad una circonferenza***

Sia Γ una circonferenza centrata nel punto O ed avente raggio R. Sia P un punto del piano. Chiamiamo inverso di P rispetto a Γ il punto P' giacente sulla retta OP dalla stessa parte di P e tale che

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2.$$



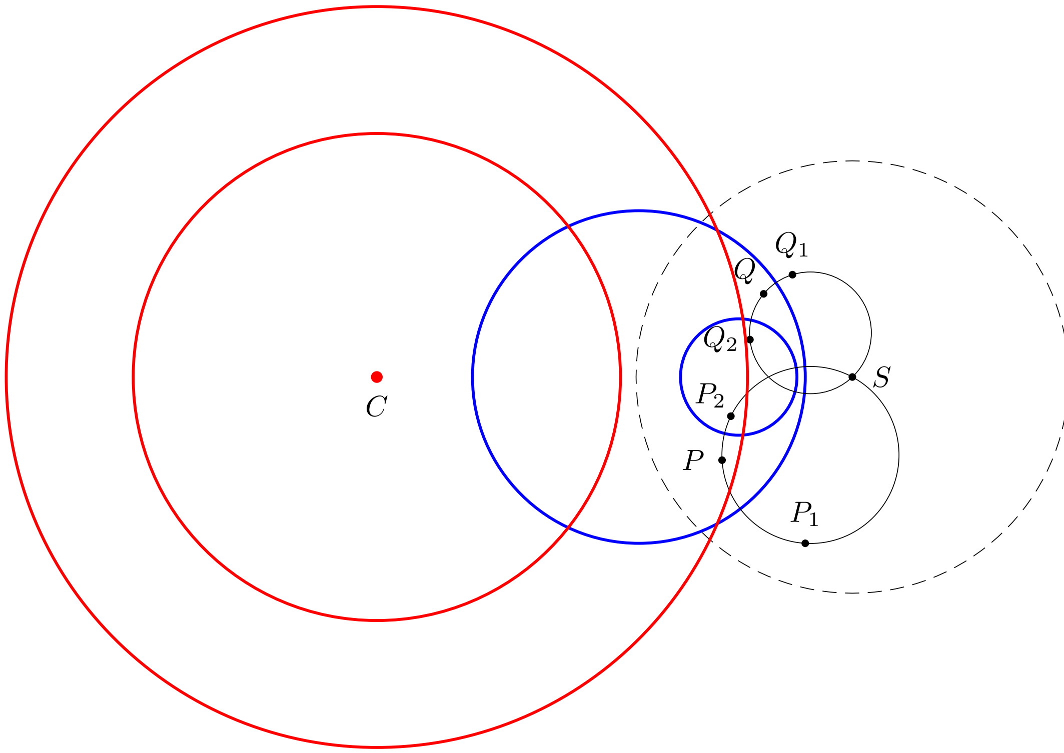
In un riferimento cartesiano Oxy, sia Γ la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2. Calcolare e rappresentare graficamente l'inverso rispetto a Γ dei seguenti punti

$$P_1(-3,0),\ P_2(1,0),\ P_3(1,1),\ P_4(0,3).$$

ESERCIZIO n. 3 (2018) ***Inversione di due circonferenze***

Eseguiamo la seguente costruzione geometrica.

- Consideriamo due circonferenze Γ_R e Γ_r, una interna all'altra, non tangenti (blu in figura).
- Sia P un punto non appartenente nè a Γ_R nè a Γ_r.
- Siano P_1 e P_2 gli inversi di P rispetto a Γ_R e Γ_r.
- La circonferenza Γ_1 passante per P, P_1 e P_2 è ortogonale sia a Γ_R sia a Γ_r.
- Sia Q un altro punto non appartenente nè a Γ_R nè a Γ_r. Siano Q_1 e Q_2 gli inversi di Q rispetto a Γ_R e Γ_r. La circonferenza Γ_2 passante per Q, Q' e Q'' è ortogonale sia a Γ_R sia a Γ_1.
- Sia S uno dei punti di intersezione di Γ_1 e Γ_2. Consideriamo una circonferenza Γ_3 centrata in S.
- Invertendo tutti i punti delle circonferenze Γ_R e Γ_r rispetto a Γ_3 otteniamo due circonferenze concentriche (rosse in figura).



Come possiamo utilizzare l'operazione di inversione di due circonferenze per costruire una catena di Steiner tra due circonferenze non concentriche, una interna all'altra, non tangenti?

Quale proprietà fondamentale della catena viene mantenuta dall'operazione di inversione di due circonferenze?

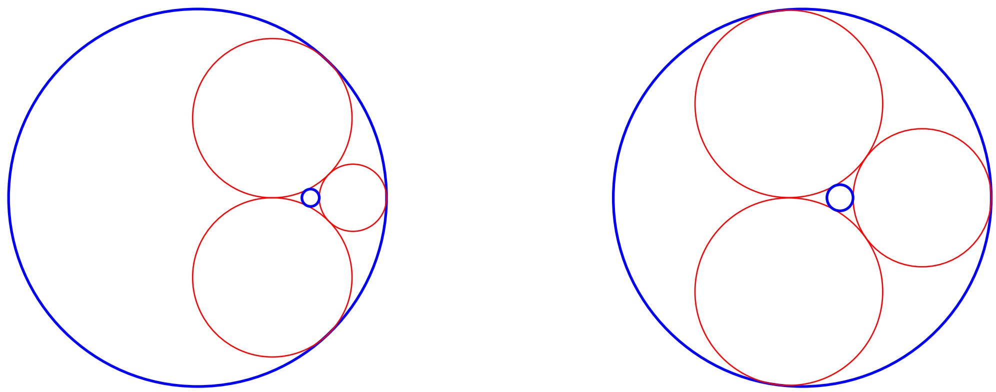


Figura 1: Due configurazioni per $n = 3$

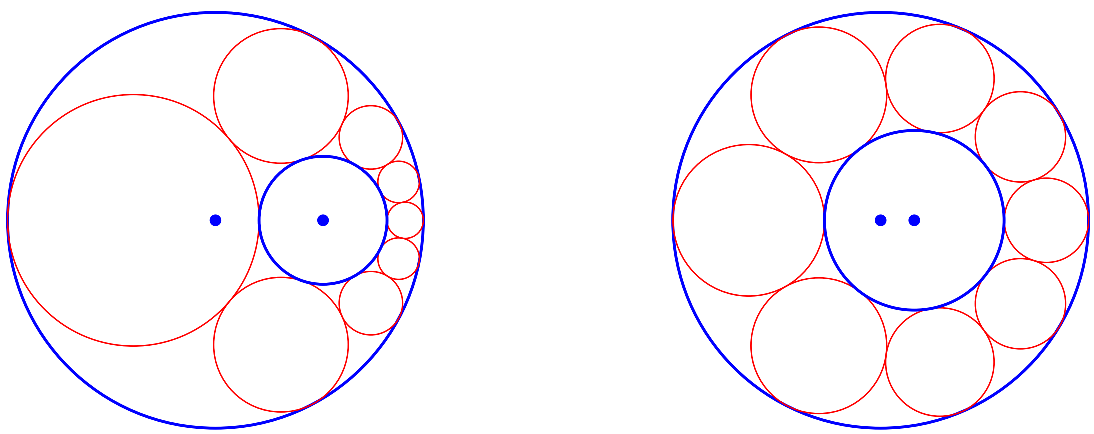


Figura 2: Due configurazioni per $n = 8$

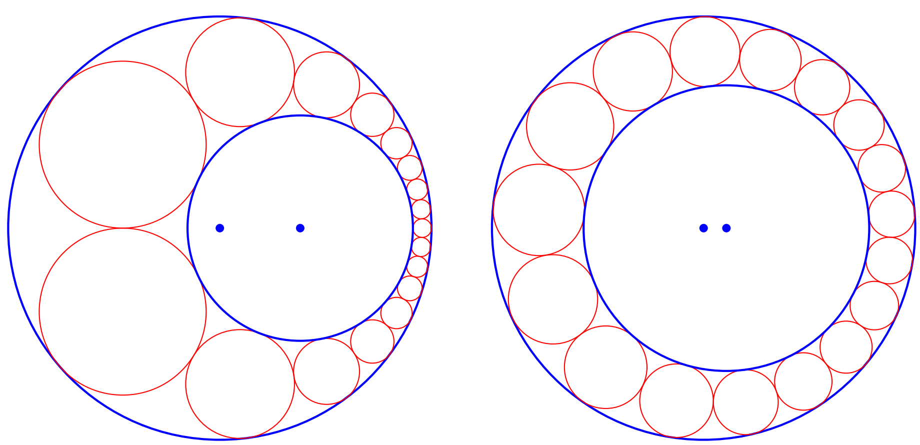


Figura 3: Due configurazioni per $n = 17$

II) Il secondo incontro è dedicato alla risoluzione del problema isoperimetrico nel piano. Per prima cosa, usando l'idea discussa alla fine del primo incontro, viene dimostrato che risolvere il problema isoperimetrico equivale a risolvere il più semplice problema di Didone. Quindi viene proposta la soluzione di Steiner del problema di Didone, per la quale sono necessarie conoscenze di geometria elementare. Alla fine dell'incontro viene però svelato agli studenti che alla base del metodo di Steiner c'è una grandissima falla: la dimostrazione funziona a patto di supporre l'esistenza di un insieme che risolva il problema di Didone. L'incontro si chiude con un'ampia discussione metodologica sul fatto che da ipotesi false possiamo dedurre qualunque affermazione.

Di seguito vengono riportati gli esercizi proposti agli studenti.

ESERCIZIO n. 1 (2018)

Siano assegnati i seguenti problemi.

1. Problema di Didone
Siano date una retta r ed una curva γ semplice, avente estremi A e B sulla retta r. Sia D l'insieme piano limitato il cui bordo è costituito dall'unione di γ e del segmento AB. Tra tutte le curve γ di lunghezza l assegnata determinare quella che delimita il dominio D avente area massima.

2. Problema isoperimetrico
Sia data una curva γ' semplice e chiusa. Sia D' l'insieme piano limitato il cui bordo è costituito da γ'. Tra tutte le curve γ' di lunghezza L assegnata determinare quella che racchiude il dominio D' avente area massima.

Dimostrare che, se D risolve il problema di Didone con $l = \frac{L}{2}$, allora l'insieme D' ottenuto unendo D ed il suo simmetrico D^r rispetto alla retta r risolve il problema isoperimetrico.

Dimostrazione.
Sia D^r il simmetrico di D rispetto alla retta r e sia $D' = D \cup D^r$. Indichiamo con d l'area di D'.
Supponiamo **per assurdo** che D' non risolva il problema isoperimetrico. Allora esiste un insieme piano limitato $\tilde{D}$ avente perimetro L ed area maggiore di d.
Siano P e Q due punti che dividono il bordo di $\tilde{D}$ in due curve di lunghezza $\frac{L}{2}$. Siano $\tilde{D}_1$ e $\tilde{D}_2$ le due porzioni in cui il segmento PQ divide $\tilde{D}$.
Osserviamo innanzitutto che uno tra $\tilde{D}_1$ e $\tilde{D}_2$ ha area maggiore dell'altro. Perchè?
Siano $a = area(\tilde{D}_1)$, $b = area(\tilde{D}_2)$ e $c = area(\tilde{D})$.
Risulta:

$$a + b = c; \quad a > b; \quad c > d.$$

Come concludiamo?

ESERCIZIO n. 2 (2018)

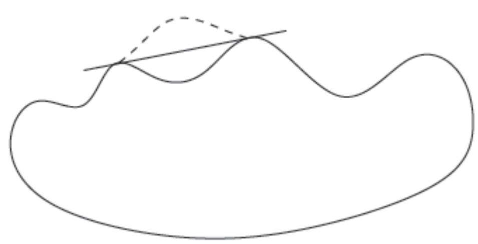
Un insieme piano E è detto *convesso* se, comunque scegliamo due punti $P, Q \in E$, il segmento di estremi P e Q è tutto contenuto in E.

- Un poligono regolare è convesso?

- Un cerchio è convesso?
- La regione piana racchiusa da un'ellisse è convessa?
- Un insieme a forma di stella o di ferro di cavallo è convesso?
- Un semipiano è convesso?
- La regione piana interna ad una parabola è convessa? E quella esterna?
- La regione piana E compresa tra i due rami di un'iperbole è convessa? Ed il complemento di E?

ESERCIZIO n. 3 (2018)

Dimostrare che l'insieme D che risolve il problema di Didone deve essere convesso.

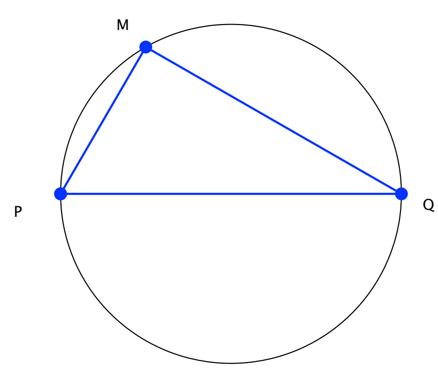


ESERCIZIO n. 4 (2018) *Teorema di Dante*

Canto 13 del Paradiso (vv.101-102)

o se del mezzo cerchio farsi puote
triangol sì ch'un retto non avesse.

Siano P e Q gli estremi di un diametro di una circonferenza Γ (vedi figura). Dimostrare che, preso un qualunque punto $M \in \Gamma$, l'angolo $\angle PMQ$ è un angolo retto.



ESERCIZIO n. 5 (2018)

Sia D la soluzione del problema di Didone e sia il bordo di D costituito dall'unione della curva semplice γ e del segmento PQ. Dimostrare che per provare che γ è una semicirconferenza basta provare che, preso $M \in \gamma$, l'angolo $\angle PMQ$ è retto.

ESERCIZIO n. 6 (2018)

Dimostrare che, tra tutti i triangoli con due lati aventi lunghezze fissate, il triangolo rettangolo ha area massima.

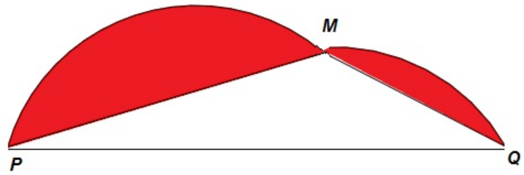
ESERCIZIO n. 7 (2018) *Manovra di Steiner*

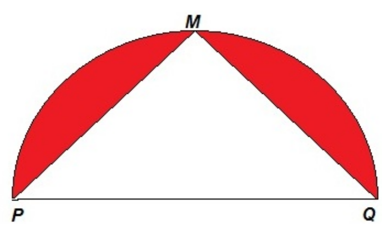
Sia D la soluzione del problema di Didone e sia il bordo di D costituito dall'unione della curva semplice γ e del segmento PQ.

Fissiamo un punto $M \in \gamma$. Immaginiamo che in M ci sia un perno e che la regione tra la curva γ ed il triangolo PMQ sia fatta di due pezzi imperniati in M (vedi figura).

Possiamo allargare o restringere l'angolo in M a piacere, o, equivalentemente, possiamo sollevare o abbassare M a piacere. La lunghezza di γ non cambia, mentre cambia l'area di D. Più precisamente, i due pezzi imperniati in M si muovono ma restano uguali, mentre cambia l'area del triangolo PMQ.

Come possiamo concludere che D è un semicerchio?





ESERCIZIO n. 8 (2018) *L'errore di Steiner*

Qual è l'errore che il matematico Dirichlet trovò nella dimostrazione fatta da Steiner?

Che abbiate capito o no quale sia la falla nella dimostrazione di Steiner, per renderla ancora più chiara, portiamola alle estreme conseguenze risolvendo il seguente

Problema superperimetrico

Sia data una curva γ' semplice e chiusa. Sia D' l'insieme piano il cui bordo è costituito da γ'. Tra tutte le curve γ' di lunghezza $L \geq 1$ determinare quella che racchiude il dominio D' avente area massima.

ESERCIZIO n. 9 (2018)

Trovare l'errore.

Proposizione. 1 è il più grande tra i numeri naturali.

Dimostrazione.
Sia n un numero naturale diverso da 1. Allora $n < n^2$, dove n^2 è ancora un numero naturale. Ciò comporta che nessun numero diverso da 1 può essere il più grande tra i numeri naturali e dunque 1 lo è.

ESERCIZIO n. 10 (2018)

Trovare l'errore.

Sia $x = y$; allora:

$$\begin{aligned} x^2 &= xy \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\ (x+y)(x-y) &= y(x-y) \\ x+y &= y \\ 2y &= y \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

CONCLUSIONI

Se le ipotesi sono errate, è possibile dimostrare qualunque cosa: *"Ex falso quodlibet"*!

Steiner in realtà non risolse il problema isoperimetrico. Egli dimostrò semplicemente che, se una soluzione del problema isoperimetrico esiste, allora deve essere un cerchio.

In realtà, la parte più difficile da dimostrare è l'esistenza di un insieme che risolve il problema isoperimetrico.

A Steiner non piacerebbe sapere che, a tutt'oggi, una dimostrazione puramente geometrica del problema isoperimetrico non è stata trovata. Tutte le dimostrazioni note fanno uso di qualche argomento di analisi matematica. :-)

III) Il terzo incontro si apre con l'introduzione del concetto di tassellatura periodica del piano. Si dimostra che le uniche tassellature periodiche possibili con poligoni regolari sono quelle fatte con triangoli equilateri, quadrati, esagoni. Quindi si discute sul perché le api costruiscano alveari con celle di forma esagonale. Si arriva a capire che le api risolvono un problema di massimo: le celle sono costruite in modo da avere area massima con perimetro (cioé quantità di cera) fissato. Gli studenti riconoscono immediatamente il legame con il problema isoperimetrico discusso nel secondo incontro. Vengono quindi proposti altri problemi di minimo: il problema di Erone, il problema dei tre punti, il problema dei sette ponti di Könisberg.

Di seguito vengono riportati gli esercizi proposti agli studenti.

ESERCIZIO n. 1 (2018)

Dato un poligono regolare avente N lati, verificare che esso ha N angoli uguali di ampiezza pari a:

$$180^\circ \left(1 - \frac{2}{N}\right).$$

ESERCIZIO n. 2 (2018)

Supponiamo di voler tassellare il piano con poligoni regolari aventi N lati. Osservare che quando più poligoni si incontrano, la somma degli angoli deve essere 360°.

i) Possiamo tassellare il piano con triangoli equilateri?

ii) Possiamo tassellare il piano con quadrati?

iii) Possiamo tassellare il piano con esagoni regolari?

iv) Possiamo tassellare il piano con pentagoni regolari?

iv) Dimostrare che, volendo tassellare il piano con poligoni regolari, gli unici tasselli ammissibili sono i triangoli equilateri, i quadrati e gli esagoni regolari.

ESERCIZIO n. 3 (2018) ***Perchè le api preferiscono gli esagoni?***

i) Calcolare l'area di un triangolo equilatero avente perimetro 1.

ii) Calcolare l'area di un quadrato avente perimetro 1.

iii) Calcolare l'area di un esagono avente perimetro 1.

iv) Quale delle tre figure ha area maggiore delle altre?

ESERCIZIO n. 4 (2018) ***Perchè le api preferiscono gli esagoni?***

i) Calcolare il perimetro di un triangolo equilatero avente area 1.

ii) Calcolare il perimetro di un quadrato avente area 1.

iii) Calcolare il perimetro di un esagono avente area 1.

iv) Quale delle tre figure ha perimetro minore delle altre?

Supponiamo che la riva di un fiume sia rettilinea e che un contadino debba andare dalla fattoria P alla fattoria Q toccando la riva del fiume per attingere acqua nel minor tempo possibile. Qual è il percorso del contadino?

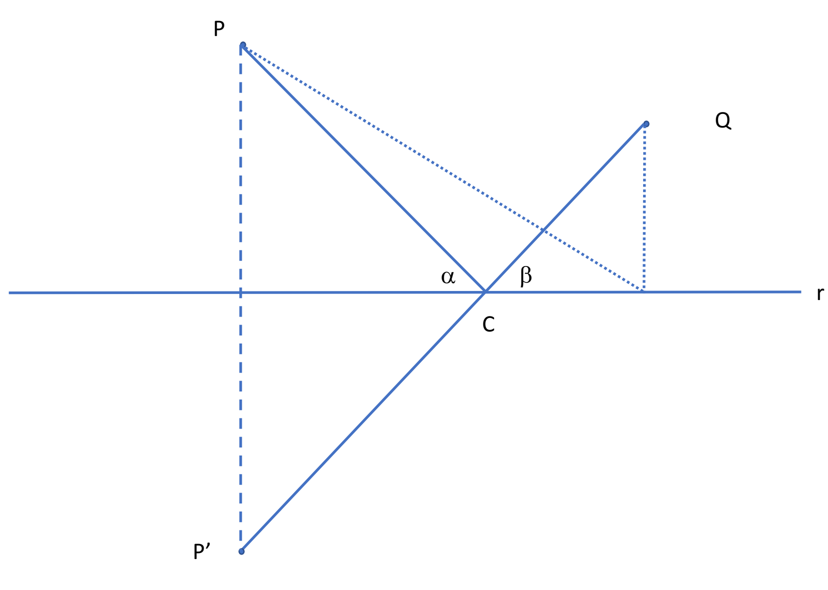
Questo è il problema di Erone di Alessandria (I secolo d. C.) per un raggio luminoso: in un punto P c'è una sorgente da cui parte un raggio di luce. Esso si riflette in un punto C di una retta r ed arriva in un punto Q. Conosciamo P e Q. Come ricaviamo la posizione del punto C (punto di incidenza) sulla retta r?

Traduciamo in "matematichese" il problema del contadino.

ESERCIZIO n. 5 (2018) ***Il problema di Erone***

Dati una retta r e due punti P e Q, non appartenenti a r, dalla stessa parte di r (vedi figura), per quale punto C di r la somma $\overline{PC} + \overline{CQ}$ rappresenta la lunghezza del cammino più breve da P a Q toccando r?

Suggerimento: Considerare il punto P' simmetrico di P rispetto a r ed il punto C intersezione della retta r con il segmento $P'Q$.



Cosa possiamo dire sugli angoli α e β in figura?

ESERCIZIO n. 6 (2018) *Il problema dei tre punti*

All'inizio del XIX secolo il matematico tedesco Jacob Steiner trattò il seguente problema:

tre villaggi A, B e C devono essere collegati con un sistema di strade di minima lunghezza totale.

Traduciamo in "matematichese" il problema di Steiner:

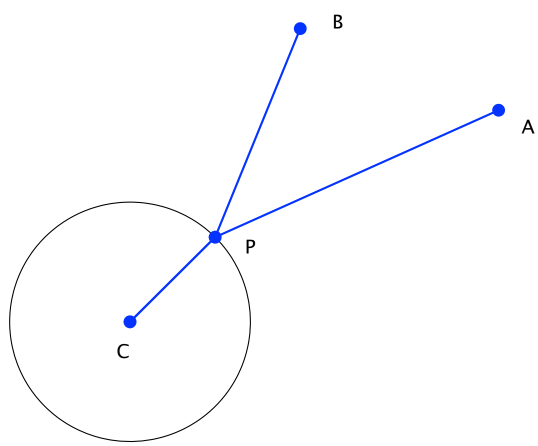
dati i tre punti A, B, C, dove dobbiamo posizionare un quarto punto P in modo che la somma

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$$

sia minima?

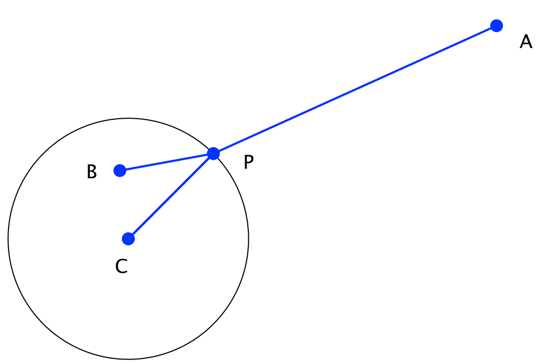
i) Se P coincide con uno dei tre punti A, B, C, con quale dei tre coincide?

ii) Se P non coincide con nessuno dei tre punti, considerare la circonferenza γ centrata in C avente raggio $\overline{CP}$. Se A e B sono esterni a γ, ovviamente P deve essere il punto di γ tale che $\overline{AP} + \overline{BP}$ è minima. Cosa possiamo concludere sugli angoli $\angle APC$ e $\angle BPC$?



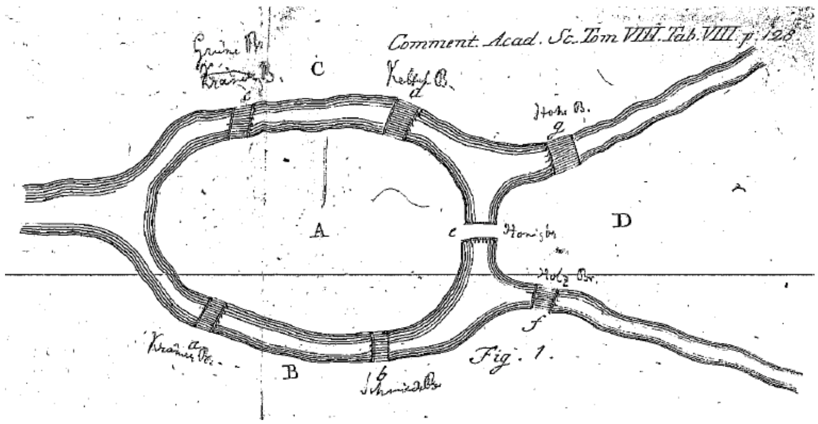
iii) Possiamo ripetere il precedente ragionamento per ottenere informazioni su tutti e tre gli angoli $\angle APC$, $\angle BPC$ e $\angle APB$?

iv) Quanto detto in *ii*) funziona se A e B sono entrambi esterni a γ. Può succedere che quest'ultimo fatto non sia vero?



ESERCIZIO n. 7 (2018) ***Il problema dei ponti di Konisberg***

A Königsberg nella Prussia orientale, oggi Kaliningrad in Russia, il fiume Pregel con i suoi rami divide la città in quattro regioni, di cui una è un'isola. Nel XVIII secolo la situazione era quella rappresentata nella seguente cartina:



Nel corso dei secoli è stata più volte proposta la questione se sia possibile con una passeggiata seguire un percorso che attraversi ogni ponte una e una volta soltanto e tornare al punto di partenza. Nel 1736 Leonhard Euler affrontò tale problema, dimostrando che la passeggiata ipotizzata non è possibile.

Quale ragionamento può aver seguito Eulero?

IV) Nell'ultimo incontro si parla di insiemi convessi di ampiezza costante nel piano e nello spazio. A partire da poligoni regolari con un numero dispari di lati gli studenti costruiscono i corrispondenti poligoni di Reuleaux. Quindi sono guidati nel dimostrare due risultati fondamentali della moderna analisi convessa:

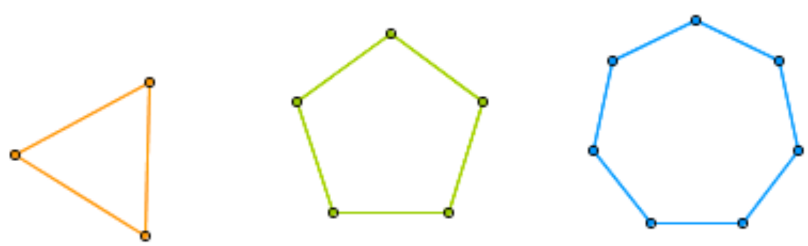
1. Tutti gli insiemi piani di ampiezza fissata d hanno lo stesso perimetro (teorema di Barbier).
2. Tra tutti gli insiemi piani di ampiezza fissata d il triangolo di Reulaux ha area minima (teorema di Blaschke-Lebesgue).

Allo scopo di dimostrare quest'ultimo vengono introdotte le nozioni di somma di Minkowski ed area mista di due insiemi piani convessi.

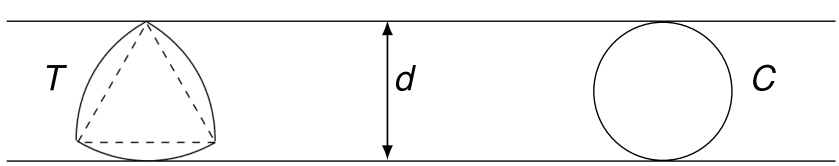
Di seguito vengono riportati gli esercizi proposti agli studenti.

ESERCIZIO n. 1 (2018)

A partire dai poligoni regolari in figura disegnare i corrispondenti poligoni di Realeaux.



ESERCIZIO n. 2 (2018)



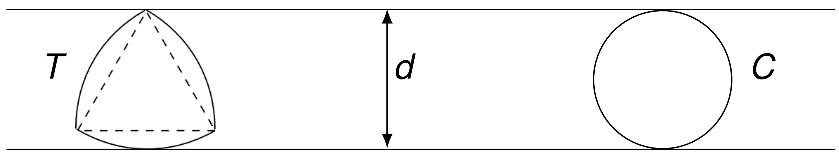
Calcolare il perimetro del triangolo di Realeaux T e del cerchio C in figura.

ESERCIZIO n. 3 (2018) *Teorema di Barbier (1860)*

Tutti gli insiemi di ampiezza costante d hanno lo stesso perimetro.

Suggerimento: Consideriamo C e T (o C ed un qualunque altro insieme di ampiezza costante d) e disegniamoli tra due rette orizzontali poste a distanza d l'una dall'altra. Facciamo rotolare la retta di sopra usando C e T come ruote. Cosa possiamo dire della velocità angolare delle figure durante la rotazione attorno al punto di contatto con la retta inferiore?

ESERCIZIO n. 4 (2018)



Calcolare l'area del triangolo di Reuleaux T e del cerchio C in figura e stabilire la relazione tra esse.

ESERCIZIO n. 5 (2018)

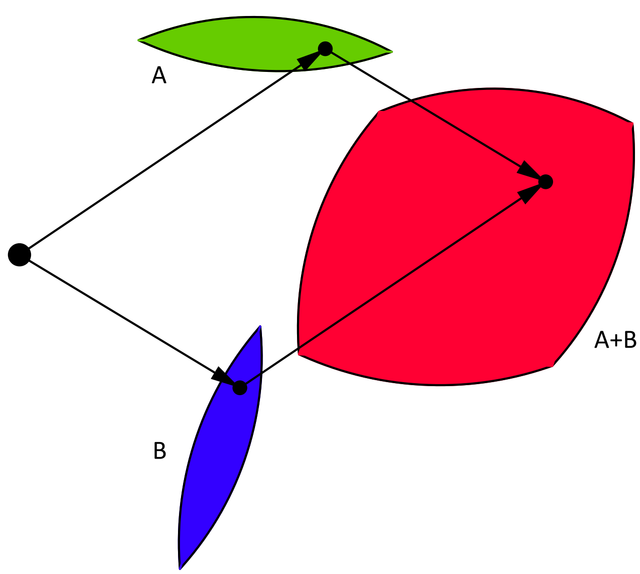
Calcolare

$$\frac{Area(C) - Area(T)}{Area(C)}$$

ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto.

Somma di Minkowski di due insiemi piani convessi limitati

$$A + B = \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\} .$$



ESERCIZIO n. 6 (2018)

Disegnare il triangolo A avente vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ ed il triangolo B avente vertici $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$.

i) Calcolare la somma di Minkowski $A+B$;

ii) calcolare le aree di A, B, $A+B$.

ESERCIZIO n. 7 (2018)

Disegnare il quadrato A avente vertici $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ ed il cerchio B, centrato nell'origine avente raggio 1.

i) Calcolare la somma di Minkowski $A+B$;

ii) calcolare le aree di A, B, $A+B$.

ESERCIZIO n. 8 (2018)

Disegnare il cerchio A, centrato nell'origine avente raggio 2, e l'insieme $-A$, simmetrico di A rispetto all'origine.

i) Calcolare la somma di Minkowski $A+(-A)$;

ii) calcolare le aree di A, $-A$, $A+(-A)$.

Osservare che $A+(-A)=B_4$, dove 4 è il diametro di A e B_4 è il cerchio di centro l'origine e raggio 4. Questa proprietà è caratteristica di tutti gli insiemi con ampiezza costante:

$$w(A)=d \Longleftrightarrow A+(-A)=B_d.$$

Area mista di due insiemi piani convessi limitati

$$2Area(A,B)=Area(A+B)-Area(A)-Area(B)$$

ESERCIZIO n. 9 (2018)

Dato un insieme limitato A, calcolare

$$Area(A,A).$$

Suggerimento. Fare gli esempi del quadrato e del cerchio.

ESERCIZIO n. 10 (2018) ***Teorema di Blaschke-Lebesgue***

Sapendo che:

ad ogni insieme piano convesso di ampiezza costante si può circoscrivere un esagono regolare, dimostrare il seguente

Teorema. Il triangolo di Reuleaux ha area minima tra tutti gli insiemi di ampiezza costante assegnata.

ESERCIZIO n. 11 (2018)

Quale insieme ha area massima tra tutti gli insiemi di ampiezza costante assegnata?