Laboratorio di Calcolo Combinatorio e Calcolo delle Probabilità

M. Tricarico – F. Visentin

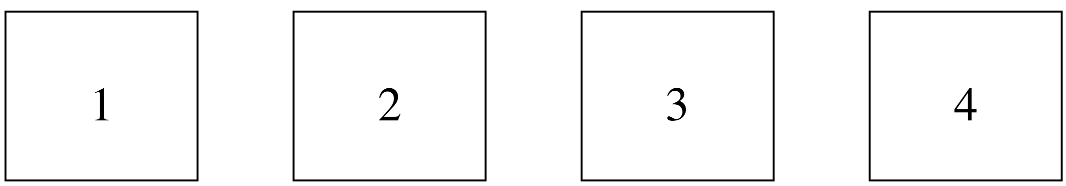
Descrizione del laboratorio.
In questo laboratorio si affronta il problema dell'introduzione al calcolo combinatorio e al calcolo delle probabilità a partire da semplici problemi, proposti direttamente agli studenti, senza illustrare preliminarmente le nozioni teoriche necessarie per risolvere i problemi stessi, salvo in casi di particolare difficoltà o se si tratta di concetti nuovi per gli studenti.
Nello spirito del progetto, abbiamo infatti cercato di far scoprire, per gradi, agli studenti la matematica di base che si "nasconde" dietro i problemi proposti. I concetti matematici sono stati semplificati il più possibile, ma sempre esposti in modo rigoroso e corretto, cercando anche di avvicinare gli studenti al cosiddetto *metodo scientifico* ed al ragionamento deduttivo.
Le modalità adottate sono le seguenti:

- assegnare agli studenti un problema concreto semplice,
- lasciare loro libertà "vigilata" di lavoro,
- formulare, attraverso un lavoro di gruppo, la soluzione del problema,
- avviare una discussione dei risultati e formulare la legge generale,
- applicare la legge generale ad altri problemi correlati.

Tutte le fasi di lavoro si sono svolte con la collaborazione attiva degli insegnanti delle scuole partecipanti.
Il laboratorio si è svolto negli anni 2009/10 e 2010/11. Gli esercizi proposti sono simili, anche se non gli stessi, nei due anni di laboratorio. In entrambi gli anni il laboratorio si è svolto in quattro incontri ai quali hanno partecipato studenti di quarto e quinto anno di liceo scientifico.
Il percorso che descriviamo si riferisce all'anno 2009/10. Alla fine riportiamo anche gli esercizi che sono stati aggiunti a quelli assegnati nel 2010/11.

I incontro - Nel primo incontro abbiamo introdotto i concetti base del calcolo combinatorio, mostrando agli studenti attraverso semplici esercizi, come l'uso del calcolo combinatorio permetta in molti casi di "aggirare l'ostacolo" di calcoli lunghi e noiosi previsti da una risoluzione "manuale".
Il primo problema affrontato riguarda le permutazioni ed il primo esercizio proposto ai ragazzi è stato il seguente:

ESERCIZIO N°1
Quattro amici: Antonio, Bruno, Carlo e Domenico, hanno prenotato a teatro quattro poltrone vicine. In quanti modi diversi si possono sedere sulle poltrone?



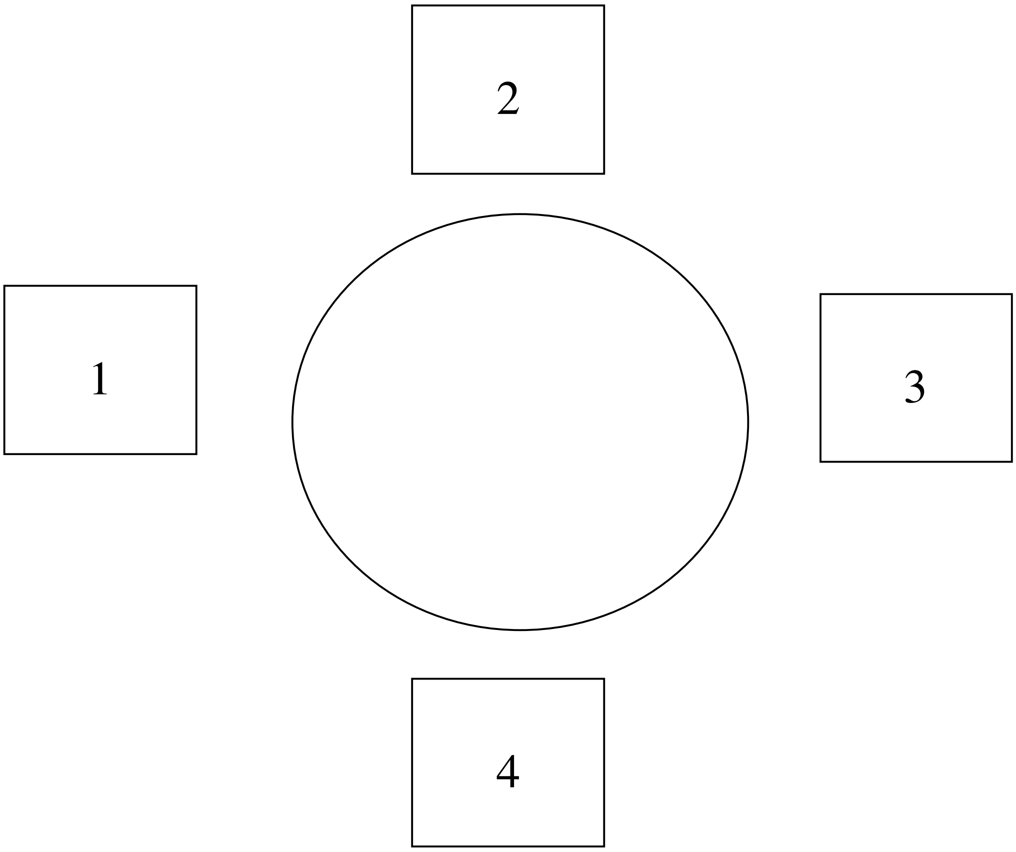
Naturalmente i ragazzi (salvo alcuni studenti di quinto anno che avevano già alcune nozioni di calcolo combinatorio) hanno risolto il problema, abbastanza facilmente considerando tutte le possibilità. Abbiamo a questo punto obiettato che se già gli amici diventano otto, il procedimento usato diventa estremamente lungo e noioso. Abbiamo quindi suggerito loro che se uno degli amici sceglie dove sedersi, può farlo in quattro modi diversi, dopo di che una sedia è occupata. Continuando il procedimento, siamo arrivati facilmente alla formula: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ (fattoriale). Abbiamo quindi introdotto il concetto di permutazione di n elementi su n posti e il relativo calcolo:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Per mostrare la differenza tra permutazioni in fila o in circolo, abbiamo proposto agli studenti il seguente esercizio:

ESERCIZIO N°2

Quattro amici: Antonio, Bruno, Carlo e Domenico, hanno prenotato un tavolo al ristorante. Il cameriere li fa sedere intorno ad un tavolo tondo: in quanti modi diversi si possono disporre intorno al tavolo?



Con il suggerimento che, essendo il tavolo rotondo, per la prima scelta tutti i posti sono equivalenti, gli studenti sono arrivati facilmente al risultato che il numero di possibili modi in questo caso è:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Per introdurre poi il concetto di permutazioni con ripetizione, abbiamo proposto il seguente esercizio:

ESERCIZIO N°3

1) Quante parole diverse si possono formare, indipendentemente dal significato, con le lettere della parola "**R O S A**" utilizzando una sola volta ogni lettera?

2) Ripetere l'esercizio con la possibilità di ripetere ogni lettera fino a quattro volte.

Gli studenti hanno risolto immediatamente il punto 1), rendendosi conto che la richiesta era identica a quella dell'esercizio 1. Per quanto riguarda il punto 2), dopo una discussione preliminare, si sono resi conto che ogni lettera può essere scelta in 4 modi diversi e quindi il risultato è 4^4. In generale quindi il numero di permutazioni con ripetizione di n elementi su n posti è:

$$P^r_n = n^n.$$

Per evitare di affastellare tutte le nozioni di calcolo combinatorio e di confondere e annoiare gli studenti discutendo problemi sempre dello stesso tipo abbiamo preferito a questo punto cominciare ad introdurli al calcolo delle probabilità, partendo dalla definizione classica. Nell'ipotesi che tutti i casi siano egualmente possibili, la probabilità p di un evento si calcola facendo il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili e quindi $p\in[0,1]$. Ad esempio nel lancio di una moneta i casi possibili sono 2 e la probabilità dell'evento di uscita di testa o di uscita di croce è $p=1/2$. Nel caso del lancio di un dado gli eventi possibili sono 6 e l'uscita ad esempio del numero 3 ha probabilità $p=1/6$.
Abbiamo comunque cercato di dare una idea generale più precisa del concetto di probabilità, tramite la teoria assiomatica.
Considerando lo spazio degli eventi come un insieme e gli eventi come sottoinsiemi abbiamo introdotto i concetti di probabilità di evento complementare, evento unione, evento intersezione e le loro proprietà.
(http://progettomatematica.dm.unibo.it/ProbElem/5definiz.html)
Sia S lo spazio degli eventi in considerazione (spazio campionario): S coincide con l'evento certo, $\emptyset$ coincide con l'evento impossibile. Dati due eventi A, B di S, con $A\cup B$ indichiamo l'evento in cui si verifica almeno uno dei due; con $A\cap B$ indichiamo l'evento in cui si verificano entrambi. In particolare se $A\cap B = \emptyset$, gli eventi si dicono indipendenti. Il complementare di un evento A, indicato con CA, coincide con l'evento: A non si verifica. Dati due eventi A e B, si ha che l'evento A implica B ($A \subseteq B$) se "ogni volta che A è verificato, anche B lo sarà".
La funzione probabilità ad ogni evento A di S associa un numero p(A), in modo che siano verificati i seguenti assiomi.
I) Positività: la Probabilità di un evento A è un numero unico maggiore o uguale di 0: $p(A)\geq 0$.
II) Certezza: la Probabilità dell'evento certo e quindi dello spazio campionario S è sempre 1: $p(S)=1$
III) Unione: siano A e B due eventi incompatibili ($A\cap B = \emptyset$), allora la probabilità della loro unione è la somma delle singole probabilità di A e B: $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.

Essendo $A\cap CA = \emptyset$ e $A\cup CA=S$, si ha che $p(A) = 1- p(CA)\leq 1$, quindi per ogni evento A di S risulta $0\leq p(A)\leq 1$. Abbiamo anche trovato in questo modo che $p(CA) = 1 - p(A)$.

Essendo in particolare $S\cap\emptyset = \emptyset$ e $S\cup\emptyset=S$, si ha $p(\emptyset)=0$.

Vale inoltre il teorema delle probabilità totali: dati due eventi A,B, $P(A\cup B)=P(A)+P(B) - p(A\cap B)$.
Infatti: $A\cup B=A\cup(CA\cap B)$ e $A\cap(CA\cap B)= \emptyset$. Inoltre $B= (A\cap B)\cup(CA\cap B)$ e $(A\cap B)\cap(CA\cap B)= \emptyset$.
Allora $p(A\cup B) = p(A) + p(CA\cap B)$ e $p(B) = p(A\cap B) + p(CA\cap B)$ e quindi l'asserto.

Da quanto dimostrato segue in particolare $p(CA\cap B) = p(B) - p(A\cap B)$.

Inoltre dagli assiomi segue anche $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
Infatti da $B = A\cup(CA\cap B)$ e $A\cap(CA\cap B)=\emptyset$, segue $p(B) = p(A) + p(CA\cap B) \geq p(A)$.

Dopo aver discusso su questi concetti e ribadito che in molti casi elementari si può considerare la probabilità come il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, abbiamo assegnato agli studenti il seguente esercizio.

ESERCIZIO N°4

1) Stabilire qual è la probabilità che, lanciando un dado, esca il numero 4.

2) Stabilire qual è la probabilità che, lanciando un dado, si verifichi uno dei due seguenti eventi:

$$A = \{1,3\} \text{ o } B = \{\text{un numero pari.}\}$$

3) Stabilire qual è la probabilità che, lanciando un dado, si verifichi uno dei due seguenti eventi:

$$A = \{1,4\} \text{ o } B = \{\text{un numero pari}\}.$$

Tenendo conto della discussione effettuata sul concetto di probabilità e sulle proprietà delle probabilità degli insiemi unione e intersezione, gli studenti non hanno avuto difficoltà a calcolare

1) $p=1/6$

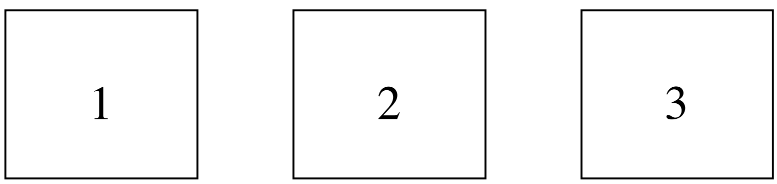
2) $p(A)=1/3$, $p(B)=1/2$, $p(A\cup B)=p(A) + p(B) = 1/3+1/2=5/6$ perché $A\cap B=\emptyset$.

3) $p(A)=1/3$, $p(B)=1/2$, $A\cap B=\{4\}$, $p(A\cap B)=1/6$, $p(A\cup B)=p(A) + p(B) - p(A\cap B)=2/3$.

Alla fine dell'incontro abbiamo lasciato agli studenti la risoluzione del seguente esercizio:

ESERCIZIO N°5

Cinque amici: Antonio, Bruno, Carlo, Domenico ed Emilio partono per un viaggio senza avere prenotato i posti in treno; purtroppo il treno è abbastanza pieno e loro trovano soltanto tre posti a sedere.
In quanti modi diversi i cinque amici si possono disporre sulle tre poltrone?



Ed abbiamo invitato i ragazzi a riflettere sulla soluzione trovata per ragionarne nel successivo incontro, mettendo a confronto i metodi diversi utilizzati.

II incontro – Il secondo incontro è dedicato ancora al calcolo combinatorio, in particolare alle disposizioni e alle combinazioni e ad un riepilogo sulla probabilità semplice. Viene ripreso l'esercizio 5. Alcuni degli studenti hanno calcolato manualmente il numero richiesto. Altri (già a

conoscenza del calcolo combinatorio) hanno applicato la formula. A partire da quest'ultima vengono tutti invitati a ragionare come nel caso delle permutazioni, in modo da arrivare ad una applicazione consapevole della formula stessa. È chiaro che la persona che occupa il primo posto può essere scelta in 5 modi diversi, la seconda in 4 modi diversi e la terza in 3 modi diversi, portando il numero totale a $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. In generale allora se gli elementi sono n e i posti k il primo elemento può essere scelto in n modi, il secondo in n–1 modi, il terzo in n–2 modi e così via fino al k-simo elemento che può essere scelto in n– (k–1)=n–k+1 modi.
Abbiamo quindi introdotto il concetto di disposizione di n elementi su k posti e il relativo calcolo:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$$

e successivamente proposto un esercizio sulla probabilità semplice, di riepilogo relativo alle proprietà illustrate nel I incontro.

ESERCIZIO N°6

In un'urna ci sono cinque palline rispettivamente contrassegnate dai numeri 1, 2, 3, 4, 5; in un'altra urna ci sono cinque palline rispettivamente contrassegnate dai numeri 6, 7, 8, 9, 10. Si estrae una pallina da ciascuna urna. Trovare la probabilità che la somma dei numeri delle palline estratte sia:

a) maggiore oppure uguale a 7

b) uguale a 11

c) minore oppure uguale a 11

Indichiamo le due urne rispettivamente con A e B; A={1,2,3,4,5}, B={6,7,8,9,10}. Per quanto riguarda il punto a) dato che il numero più piccolo in A è 1 e il più piccolo in B è 6 gli studenti si sono subito resi conto che la somma per qualunque estrazione è maggiore oppure uguale a 7 e quindi p=1. Per i punti b) e c) hanno costruito gli insiemi dei casi favorevoli e dei casi possibili.
Per entrambi i punti il numero di casi possibili è 25, infatti

$A \cup B$={(1,6),(1,7),(1,8),(1,9),(1,10), (2,6),(2,7), (2,8), (2,9),(2,10), (3,6),(3,7),(3,8), (3,9),(3,10), (4,6),(4,7),(4,8),(4,9),(4,10),(5,6),(5,7), (5,8) (5,9), (5,10)}.

Nel punto b) i casi favorevoli sono 5: {(1,10), (2,9),(3,8), (4,7), (5,6)}, e quindi p=1/5.
Nel punto c) i casi favorevoli sono 15 :{1,6),(1,7),(1,8),(1,9),(1,10), (2,6),(2,7),(2,8),(2,9),(3,6), (3,7), (3,8), (4,6),(4,7)),(5,6)} e quindi p=3/5.

L'esercizio successivo riguarda al punto 1) le disposizioni, mentre introduce ai punti 2) e 3) le combinazioni ed è molto utile per mostrare agli studenti la differenza tra i due concetti.

ESERCIZIO N°7

1) Un club sportivo costituito da 20 soci deve eleggere:
a) il presidente
b) il vicepresidente
c) il tesoriere
In quanti modi è possibile effettuare la scelta?

2) Lo stesso club sportivo deve nominare un consiglio di amministrazione presieduto dal presidente e formato da 5 consiglieri:
In quanti modi è possibile effettuare la scelta dei consiglieri, dopo l'elezione del presidente?

3) Sempre lo stesso club sportivo deve inviare ad un meeting 10 dei 25 atleti iscritti al club.

In quanti modi è possibile effettuare la scelta indipendentemente dalla bravura degli atleti?

Per quanto riguarda il punto 1) gli studenti non hanno avuto nessuna difficoltà a capire che si trattava di disposizioni come nell'esercizio 5 e ad effettuare il calcolo: $20 \cdot 19 \cdot 18$.

Per il punto 2) alcuni si sono fermati a riflettere notando una differenza rispetto al punto 1), altri volevano invece applicare ancora la formula relativa alle disposizioni, partendo però da 19 soci (una volta escluso il presidente). Abbiamo fatto notare che nel punto 2) il ruolo da svolgere era unico, a differenza del punto 1); di conseguenza l'ordine con cui si scelgono i 5 soci tra i 19 non ha importanza. Se A, B, C, D, E sono i 5 soci scelti, le permutazioni semplici di tali soci portano sempre alla stessa scelta. Per ottenere quindi il numero di scelte possibili, basta calcolare il numero delle disposizioni dei 19 soci su 5 posti e poi dividere per il numero di permutazioni sui 5 posti, cioè dividere per 5!. In questo caso si ottiene: $19 \cdot 18 \cdot 17/5!$.

A questo punto gli studenti non hanno avuto difficoltà a capire che il punto 3) era analogo al punto 2).

Abbiamo allora introdotto in generale il concetto di combinazione semplice di n elementi su k posti e il corrispondente numero, dato dalla formula:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Abbiamo assegnato successivamente due esercizi relativi al gioco del lotto. Tale gioco è molto popolare, abbiamo comunque ricordato a tutti il procedimento di estrazione: si estraggono su ogni ruota senza reimbussolamento uno dopo l'altro 5 numeri (cinquine). Le possibili vincite riguardano l'estratto semplice (un solo numero), l'ambo (2 numeri), il terno (3 numeri), la quaterna (4 numeri) e la cinquina (5 numeri).

ESERCIZIO N°8

a) Con i 90 numeri del lotto, quanti ambi posso costruire?
b) Con i 90 numeri del lotto, quanti terni posso costruire?

È stato molto semplice per gli studenti ricavare:

a) $C_{90,2} = \binom{90}{2}$;

b) $C_{90,3} = \binom{90}{3}$.

Sempre utilizzando il gioco del lotto abbiamo inserito un esercizio sul calcolo delle probabilità.

ESERCIZIO N°9

a) Se gioco un numero al lotto qual è la probabilità che esca (estratto semplice)?

b) Se gioco due numeri al lotto qual è la probabilità che escano (ambo)?

c) Se gioco tre numeri al lotto qual è la probabilità che escano (terno)?

d) Se gioco quattro numeri al lotto qual è la probabilità che escano (quaterna)?

e) Se gioco cinque numeri al lotto qual è la probabilità che escano (cinquina)?

Tutti gli studenti hanno calcolato immediatamente il numero di casi possibili (uguale per tutte le richieste): $C_{90,5} = \binom{90}{5}$. Qualche difficoltà è stata riscontrata invece nel calcolo del numero di casi favorevoli. Abbiamo quindi discusso insieme con gli studenti il punto a) ragionando sul fatto che richiedere una cinquina su 90 numeri contenente un numero prefissato equivale a richiedere una quaterna qualunque su 89 numeri. A questo punto è stato facile determinare il numero di casi favorevoli, e di conseguenza le richieste probabilità per tutti i punti:

a) $C_{89,4} = \binom{89}{4}$; $p = \frac{C_{89,4}}{C_{90,5}} = \frac{89!}{4!\,85!}\,\frac{5!\,85!}{90!} = \frac{5}{90} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

b) $C_{88,3} = \binom{88}{3}$; $p = \frac{C_{88,3}}{C_{90,5}} = \frac{88!}{3!\,85!}\,\frac{5!\,85!}{90!} = \frac{5\cdot 4}{90\cdot 89} = \frac{2}{801} \cong 0{,}002$.

c) $C_{87,4} = \binom{87}{2}$; $p = \frac{C_{87,2}}{C_{90,5}} = \frac{87!}{2!\,85!}\,\frac{5!\,85!}{90!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{90\cdot 89\cdot 88} = \frac{1}{11748} \cong 0{,}000085$.

d) $C_{86,1} = \binom{86}{1} = 86$; $p = \frac{86}{C_{90,5}} = 86 \cdot \frac{5!\,85!}{90!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87} = \frac{1}{511038} \cong 0{,}0000019$.

e) $C_{85,0} = 1$; $p = \frac{1}{C_{90,5}} = \frac{5!\,85!}{90!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86} = \frac{1}{43949268} \cong 0{,}000000023$.

III incontro - Proseguendo nel percorso sullo studio del calcolo delle probabilità abbiamo dato da risolvere agli studenti un ulteriore esercizio sulla probabilità semplice per poi passare ad illustrare la probabilità condizionata.

ESERCIZIO N°10

a) Quale è la probabilità di fare 6 al superenalotto?

b) Quale è la probabilità di fare 5 al superenalotto?

c) Quale è la probabilità di fare 4 al superenalotto?

d) Quale è la probabilità di fare 3 al superenalotto?

e) Quale è la probabilità di fare 5+1 al superenalotto?

Nel gioco del superenalotto vengono estratti (senza reinserimento) 6 numeri tra 90. Successivamente viene estratto il numero "jolly". Si vince indovinando da 3 a 6 numeri della prima sestina. Una ulteriore possibilità di vincita è il "5+1": 5 numeri nella sestina e il numero jolly.

In tutti i punti considerati il numero di casi possibili è sempre $C_{90,6} = \binom{90}{6}$.

a) Abbiamo un solo caso favorevole e quindi $p = \frac{1}{\binom{90}{6}} = \frac{1}{622614630}$.

b) Ora i casi favorevoli sono tanti quante le sestine costruite con 5 dei 6 numeri giocati e uno qualsiasi degli 84 numeri rimasti: $\binom{6}{5} \cdot 84 = 6 \cdot 84$. Di conseguenza $p = \frac{6 \cdot 84}{\binom{90}{6}} \cong 0{,}0000008.$
Notiamo che il valore trovato comprende sia il caso del 5 "secco" che il caso del 5+1, che poi calcoleremo a parte.

Procedendo allo stesso modo si ottiene nel caso c): $p = \frac{\binom{6}{4}\binom{84}{2}}{\binom{90}{6}} \cong 0{,}0000839$; e nel caso d): $p = \frac{\binom{6}{3}\binom{84}{3}}{\binom{90}{6}} \cong 0{,}003.$

e) Per il calcolo dei casi favorevoli bisogna pensare che dei 6 numeri giocati ne indoviniamo 5, e indoviniamo anche il numero jolly (estratto successivamente), quindi i casi favorevoli sono $\binom{6}{5}\binom{1}{1} = 6$, e quindi $p = \frac{6}{\binom{90}{6}} = \frac{6}{622614630} = \frac{1}{103769105}$. Notiamo che la probabilità del 5 "secco" può essere ottenuta per differenza, oppure osservando che in questa situazione i casi favorevoli si ottengono tenendo conto che dei 6 numeri giocati ne indoviniamo 5, non indoviniamo il numero jolly e il restante numero della combinazione è uno degli 83 numeri rimasti dopo l'estrazione del numero jolly: $\binom{6}{5}\binom{1}{0}\binom{83}{1} = 6 \cdot 83.$

Abbiamo a questo punto introdotto il concetto di probabilità condizionata: la probabilità condizionata di un evento A rispetto ad un evento B, p(A\B), è la probabilità che si verifichi A sapendo che si è verificato B p(A\B). Si ha $p(A\backslash B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$, dove $p(A \cap B)$ è la probabilità congiunta dei due eventi. Ovviamente se è B condizionato da A, allora: $p(B\backslash A) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}$, e quindi p(A∩B) = p(A\B)p(B) = p(B\A)p(A). Chiaramente se i due eventi sono indipendenti, cioè se A∩B=∅, allora p(A∩B)=p(A)p(B) e quindi p(A\B)=p(A), p(B\A)=p(B). Utilizzando semplici considerazioni di teoria degli insiemi, si ha $B = (A \cap B) \cup (CA \cap B)$ e $(A \cap B) \cap (CA \cap B) = \emptyset$. Allora

$$p(B) = p(A \cap B) + p(CA \cap B) = p(B\backslash A)p(A) + p(B\backslash CA)p(CA).$$

Possiamo allora scrivere p(A\B) nella forma

$$p(A\backslash B) = \frac{\mathrm{p(B\backslash A)p(A).}}{p(B\backslash A)p(A)+p(B\backslash CA)p(CA)} .$$

Questa formula esprime il Teorema di Bayes sulla probabilità condizionata.

ESERCIZIO N°11

In un'urna ci sono 5 palline: 4 bianche e una rossa. A turno 5 giocatori estraggono ognuno una pallina (senza reinserimento delle palline estratte). Vince chi estrae la pallina rossa.

Un giocatore G_1 con prepotenza decide di essere sempre il primo ad estrarre e ottiene quanto desidera, poi un secondo giocatore G_2 decide che tra i quattro rimasti deve essere il primo a giocare, e così via. In questo modo l'ordine di gioco rimane sempre lo stesso: G_1, G_2, G_3, G_4, G_5.

L'ordine prefissato altera la probabilità di vincita di ciascun giocatore? Calcolare ad esempio la probabilità di vincita di G_1 e di G_2.

Dato che G_1 estrae per primo la sua probabilità di vincita è $p(G_1)=1/5$. G_2 può procedere all'estrazione solo se G_1 estrae una pallina bianca, quindi $p(G_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$. Se si procede allo stesso modo si vede che per tutti la probabilità è 1/5. Non sempre la prepotenza paga!

ESERCIZIO N°12

Il giorno in cui si corre un Gran Premio di Formula 1 è prevista pioggia con una probabilità del 30%. Il pilota Dan Broom ha una probabilità di vittoria dello 0,4% se piove e dello 0,01% se non piove. Calcolare:

1) la probabilità che Dan Broom vinca la corsa.

2) la probabilità di pioggia se vince Dan Broom.

Evento P: piove, p(P) = 3/10 = 0,3. Evento CP: non piove, p(CP) = 7/10 = 0,7.

Sappiamo inoltre che p(B\P) = 0,004 e che p(B\CP) = 0,001. Quindi:

Evento B: Dan Broom vince la corsa, P(B) = 0,004 · 0,3 + 0,001 · 0,7 = 0,0012 + 0,0007 = 0,0019.

Il punto 1) è risolto. Dobbiamo calcolare p(P\B).

$$p(P\backslash B) = \frac{\mathrm{p(B\backslash P)p(P)}}{p(b)} = \frac{0{,}004 \cdot 0{,}3}{0{,}0019} = \frac{0{,}0012}{0{,}0019} \cong 0{,}6316 \,.$$

ESERCIZIO N°13

(https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Bayes)

In una scuola il 60% degli studenti sono ragazzi e il 40% sono ragazze. Una metà delle ragazze usa indossare i pantaloni e l'altra metà usa indossare la gonna. Un passante vede da lontano nel cortile della scuola uno studente che indossa i pantaloni. Qual è la probabilità che si tratti di una ragazza?

Evento A: lo studente è una ragazza; evento CA: lo studente è un ragazzo. P(A)=2/5, p(CA)=3/5

Evento B: lo studente indossa i pantaloni.

Dobbiamo calcolare p(A\B)

B\A una ragazza indossa i pantaloni e p(B\A) =1/2 (le ragazze indossano gonna o pantaloni in ugual numero).

B\CA un ragazzo indossa i pantaloni , p(B\CA) =1

Allora in totale 80 studenti indossano i pantaloni. Quindi p(B) = 4/5 e

$$p(A\backslash B) = \frac{\mathrm{p(B\backslash A)p(A)}}{p(b)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}\,.$$

IV incontro – Abbiamo pensato all'ultimo incontro come ad uno spazio da utilizzare per discutere particolari problemi che sono considerati paradossi nella teoria della probabilità. Il primo problema che poniamo può essere risolto in vari modi. Abbiamo preferito usare il teorema di Bayes, come riepilogo degli argomenti discussi nell'incontro precedente.

Problema delle buste

da "Aspetti paradossali in problemi di probabilità" di Domingo Paola, Gruppo di Ricerca e Educazione in Matematica dell'Università di Genova, Dipartimento di Matematica)

Abbiamo tre buste indistinguibili A, B, C. La busta A contiene 2 assegni da 10000 euro, la busta B contiene un assegno da 10000 euro e uno da 1000 euro, la busta C contiene 2 assegni da 1000 euro. Estraiamo una busta a caso, apriamola e scegliamo uno dei 2 assegni. Supposto che l'assegno estratto sia da 10000 euro, qual è la probabilità che anche il secondo sia da 10000 euro?

Dobbiamo calcolare p(A\10000).

Ovviamente p(A) = p(B) = p(C) = 1/3.

Inoltre p(10000\A) =1, p(10000/B)=1/2, p(10000\C) = 0. Per il Teorema di Bayes:

$$p(a\backslash 10000) = \frac{P(10000\backslash A)p(A)}{p(10000\backslash A)p(A)+p(10000\backslash B)p(B)+p(10000\backslash C)p(C)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\,.$$

Abbiamo poi posto agli studenti il famoso

Problema del compleanno

(da "Aspetti paradossali in problemi di probabilità" di Domingo Paola, Gruppo di Ricerca e Educazione in Matematica dell'Università di Genova, Dipartimento di Matematica)

Il problema del compleanno può essere così formulato:
in una classe vi sono *n* studenti. Ammettendo di sapere che nessuno degli *n* studenti è nato il ventinove febbraio, si chiede qual è la probabilità che almeno due studenti siano nati nello stesso giorno dell'anno.
Notiamo che:

(a) se gli studenti fossero 366 la probabilità richiesta sarebbe uguale a 1;
(b) se vi fosse un solo studente la probabilità sarebbe uguale a 0.

Abbiamo chiesto agli studenti di pensare quando tale probabilità è > 0,5. Posto il problema abbiamo iniziato la discussione. La maggior parte degli studenti ha indicato numeri molto alti per n intorno a 182, pensando che la probabilità di risoluzione del problema fosse ½ se *n* = 180 (la metà dell'anno). Questo è dovuto al fatto che nella maggior parte dei casi tendiamo a risolvere i problemi pensando ad un andamento proporzionale. Per risolvere effettivamente il problema abbiamo dovuto suggerire che è più facile calcolare la probabilità dell'evento complementare, cioè la probabilità che tutti gli *n* studenti della classe siano nati in giorni diversi. Sia E l'evento: due studenti sono nati nello stesso giorno dell'anno, calcoliamo quindi p(CE) e poi p(E)=1–p(CE).

Si procede in questo modo: il numero di casi possibili coincide con il numero delle disposizioni con ripetizione di 365 giorni su n posti: 365^n.

Per calcolare il numero dei casi favorevoli: il primo studente può essere nato in uno qualunque dei 365 giorni dell'anno, il secondo studente in uno qualsiasi del 364 giorni rimanenti e così via, otteniamo cioè il numero delle disposizioni dei 365 giorni dell'anno su n posti:

$$365 \cdot 364 \cdot \ldots (365 - n + 1) \quad .$$

Allora

$$p(CE) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots (365-n+1)}{365^n} \quad .$$

Si vede che per n=23, p(CE)=0,49, per n=60, , p(CE)=0,005, per n=80, , p(CE)≅1. Bastano quindi 23 studenti in un'aula per avere p(E)=0,51>0,5.

Paradosso di Monty Hall

(http://utenti.quipo.it/base5/probabil/montyhall.htm)

Il problema di Monty Hall (o paradosso di Monty Hall) è un famoso problema di teoria della probabilità, legato al gioco a premi statunitense "Let's Make a Deal". Prende il nome dal conduttore dello show, Maurice Halprin, noto con lo pseudonimo di Monty Hall. Il problema è anche noto come paradosso di Monty Hall, poiché la soluzione può apparire contro-intuitiva, anche se non genera contraddizioni logiche.

Nel gioco vengono mostrate al concorrente tre porte chiuse; dietro ad una si trova un'automobile, mentre ciascuna delle altre due nasconde una capra. Il giocatore può scegliere una delle tre porte, vincendo il premio corrispondente. Dopo che il giocatore ha selezionato una porta, ma non l'ha ancora aperta, il conduttore dello show – che conosce ciò che si trova dietro ogni porta – apre una delle altre due, rivelando una delle due capre, per aumentare la tensione e poi mostra la scelta fatta dal giocatore. La domanda interessante è: se si offre al giocatore la possibilità di cambiare la propria scelta iniziale, passando all'unica porta restante: cambiare la porta aumenta la probabilità del giocatore di vincere l'automobile?

La risposta è sì: cambiando le probabilità di successo passano da 1/3 a 2/3.

Questa formulazione del problema è contenuta in una lettera del 1990 di Craig F. Whitaker, indirizzata alla rubrica di Marilyn vos Savant (detentrice di un primato da Guinness per quoziente di intelligenza.) nel settimanale Parade. Marilyn rispose affermativamente: cambiando porta, le probabilità di successo passano da 1/3 a 2/3.
La risposta suscitò un grande scalpore e alla rivista arrivarono più di 10000 lettere, anche di matematici importanti e almeno il 90% di tali lettere sosteneva che la risposta di Marilyn era sbagliata.

Vediamo come si arriva alla soluzione del problema utilizzando il calcolo delle probabilità. Indichiamo con 1, 2, 3 le porte. Supponiamo ad esempio che Il giocatore scelga la porta 1, ma non la apre, il conduttore invece apre la porta 3 e mostra la capra al giocatore e gli chiede se vuole cambiare la sua scelta. Tre sono le possibilità:

a) il giocatore mantiene sempre la scelta fatta inizialmente;
b) il giocatore cambia sempre la scelta ed indica la rimanente porta 2;
c) il giocatore sceglie nuovamente a caso uno fra le due porte rimaste.

La probabilità di indovinare con la strategia a) è 1/3, infatti i casi possibili sono 3 e i casi favorevoli 1.
La probabilità di indovinare con la strategia b) è 2/3. Con questa strategia il giocatore *non risceglie a caso* fra le due porte rimanenti ma *cambia sempre la porta*.
La probabilità che l'automobile sia dietro una delle due porte *non* scelte è 2/3.
Visto che il conduttore rivela quale delle due porte nasconde la capre, la probabilità che l'oggetto sia nell'altra è ancora 2/3.
Cambiando porta è come se il giocatore avesse scelto *due* porte, anziché *una*.
La probabilità di indovinare con la strategia c) è 1/2
Dopo che il conduttore ha mostrato una porta che nasconde una capra è evidente che l'automobile si trova dietro una delle altre due.
Dunque *riscegliendone* una a caso, la probabilità di indovinare è 1/2.
In conclusione cambiare la porta conviene, dato che la probabilità di vincita sale a 2/3 e la risposta di Marilyn era corretta.

Il problema può essere risolto anche usando il teorema di Bayes. Consideriamo ancora il caso in cui la porta 3 è stata aperta dal conduttore mostrando una capra, e che il concorrente abbia selezionato la porta 1.

Evento A_1: l'auto si trova dietro la porta 1, $p(A_1)= 1/3$, in quanto l'auto ha a priori la stessa probabilità di trovarsi dietro ciascuna porta.

Evento C_3: il conduttore apre la porta 3, $p(C_3) = ½$ (dal punto di vista del concorrente), visto che il conduttore deve scegliere una delle due porte non scelte dal concorrente.

Evento A_2: l'auto si trova dietro la porta 2.
La probabilità che l'automobile si trovi dietro la porta 2 (ovvero la probabilità di trovare l'auto dopo aver cambiato la scelta iniziale) è $1 – p(A_1\backslash C_3)$.

La probabilità che il conduttore selezioni una porta con dietro la capra, posto che l'automobile sia dietro la porta 1, p $(C_3\backslash A_1)$, è 1/2 perché se l'automobile è dietro la porta 1, scelta inizialmente, il conduttore può scegliere di aprire una delle altre due porte 2 o 3: dal punto di vista del concorrente il conduttore ha quindi due porte tra cui scegliere, cioè probabilità 1/2 per ognuna.

Pertanto, sfruttando il teorema di Bayes:

$$p(A_2\backslash C_3) = 1 - p(A_1\backslash C_3) = \frac{p(C_{23}\backslash A_1)p(A_1)}{p(C_3)} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \ .$$

Un altro paradosso va sotto il nome di "problema del cavalier De Mère (matematica.unibocconi.it) ed è legato al gioco dei dadi e delle scommesse, molto in voga nei secoli 1500 e 1600. Proprio allora cominciò a svilupparsi lo studio sistematico del calcolo delle probabilità per risolvere problemi legati al gioco d'azzardo. Il cavalier De Mère pose una serie di problemi legati al gioco dei dadi e alla probabilità di vincere a Blaise Pascal. Uno dei problemi è il seguente:

Problema del cavalier De Mère

(http://matematica-old.unibocconi.it/interventi/bovetti/azzardo2.htm)

Esiste la stessa probabilità di vincere scommettendo che esca almeno un 6 su 4 tiri consecutivi, lanciando un dado alla volta, oppure scommettendo che escano almeno due 6 su 24 tiri, lanciando due dadi alla volta?

Egli pensava che la risposta al quesito fosse positiva in base al ragionamento che la probabilità di uscita di un 6 è 1/6 e su 4 tiri: $4 \cdot 1/6 = 2/3$. Per 2 dadi la probabilità di uscita di due 6 è 1/36 e per 24 lanci: $24 \cdot 1/36 = 2/3$. Però scommettendo perdeva molto di più nella seconda eventualità. Pascal iniziò una corrispondenza con Fermat sull'argomento e insieme arrivarono alla soluzione del problema, dando una risposta negativa al quesito posto.
Il problema si risolve come segue:

Evento A: esce almeno un 6 su 4 lanci di un dado, CA: non esce 6 su 4 lanci, $p(CA) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ (gli eventi dei singoli lanci sono indipendenti) e quindi $p(A) = 1 - p(CA) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0{,}518$.

Evento B: esce almeno un doppio 6 su 24 lanci di due dadi, CB: non esce mai un doppio 6 su 24 lanci di due dadi.

$$p(CB) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}, \quad p(B) = 1 - p(CB) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0{,}491 < 0{,}518 \ .$$

Un altro problema molto studiato era il problema di suddivisione della posta in gioco in caso di interruzione prima della fine della partita. Dato che il gioco d'azzardo era proibito accadeva spesso che la polizia intervenisse e che quindi uno dei giocatori si incaricasse di mettere in salvo tutta la posta. Una prima soluzione (errata) del problema su un gioco di 60 partite di cui 50 completate con posta di 20 denari fu data da Luca Pacioli, nel 1494. Pacioli però utilizzò erroneamente un metodo basato sulla proporzionalità.
Impostiamo il problema semplificando i numeri.

Suddivisione della posta

(Domingo Paola, Gruppo di Ricerca e Educazione in Matematica dell'Università di Genova, Dipartimento di Matematica, via L.B. Alberti, 4 –
http://www.matematica.it/paola/problema delle parti.pdf)

Due giocatori di pari abilità disputano una serie di partite; vince il gioco chi, per primo, raggiunge un totale di sei vincite. I giocatori, però, devono sospendere il gioco prima che questo abbia termine.
Si domanda: se al momento della sospensione un giocatore ha vinto cinque partite e l'altro tre, e la posta in gioco è di 24 euro, come deve essere ripartita tale somma fra i due giocatori in modo tale che la ripartizione sia equa?

Usiamo il ragionamento di Luca Pacioli. Al momento dell'interruzione, le partite giocate sono 8, quindi impostiamo la proporzione:

Punteggio totale : punteggio del giocatore A = posta : euro che spettano ad A

ossia, nel nostro caso:

$$8 : 5 = 24 : x$$

da cui si ottiene che, secondo tale modello, un'equa spartizione sarebbe di 15 euro ad A e 9 a B.
Una tale soluzione non è soddisfacente: che cosa accade nel caso in cui il gioco venga interrotto sul punteggio di 1 a 0 per A (come osservò Tartaglia)?

$$1 : 1 = x : 24$$

ossia 24 euro ad A e nulla a B!
Nonostante l'interesse per il problema e nonostante i successivi tentativi di risoluzione di Cardano, di Tartaglia e di Pietro Cattaneo, si deve attendere fino alla metà del diciassettesimo secolo per avere una risposta corretta con Pascal e, indipendentemente, con Fermat. La prima soluzione completa a noi giunta del problema delle parti è contenuta nella lettera di Pascal a Fermat del 29/07/1654.
Pascal, in risposta ad una lettera di Fermat andata perduta, afferma di ammirare la soluzione del problema precedentemente inviatagli da Fermat ma, poiché “il metodo delle combinazioni è faticoso”, ne propone un altro iterativo.
La soluzione corretta del problema viene raggiunta grazie al calcolo delle probabilità: sia E_1 l'evento "il giocatore A guadagna un punto"; sia E_2 l'evento "il giocatore B guadagna un punto".
Nell'ipotesi che, al momento dell'interruzione A abbia 5 punti e B abbia 3 punti e che la partita si giochi al meglio dei 6 punti, la speranza di vittoria di A è legata al verificarsi di almeno una fra le seguenti successioni di eventi:
E_1; E_2E_1; $E_2E_2E_1$ aventi probabilità che (per la regola della probabilità composta di eventi indipendenti) sono rispettivamente uguali a 1/2 , 1/4, 1/8. La probabilità che A vinca è quindi data, per la regola sulla probabilità totale per eventi incompatibili, da 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8, per cui un'equa ripartizione dei 24 euro è 21 euro ad A e 3 a B.

Le risoluzioni di Pascal e Fermat hanno una cosa in comune che le contraddistingue nettamente dalla risoluzione di Pacioli. Pascal e Fermat suddividono la posta in parti proporzionali alla probabilità che i due giocatori hanno di vincere al momento dell’interruzione. Pacioli suddivide la posta in parti proporzionali al punteggio all’atto dell’interruzione. È come se Pacioli guardasse solo a che cosa è già accaduto, mentre Pascal e Fermat guardano a quello che avrebbe potuto ancora accadere. È questo cambio di prospettiva che caratterizza la nascita del pensiero probabilistico.

Fin qui il laboratorio 2009/2010; il laboratorio 2010/2011 ricalca il percorso già descritto, salvo l’aggiunta di altri esercizi al fine di arricchire le conoscenze e competenze degli studenti nel campo del calcolo combinatorio e del calcolo delle probabilità.
Riportiamo qui di seguito soltanto gli esercizi che sono stati aggiunti a quelli del precedente percorso e che sono stati assegnati nel 2010/11.

ESERCIZIO N° 3a

Scrivere tutti i numeri di tre cifre formati dalle cifre 1, 2, 3 anche ripetute fino a tre volte ognuna.

ESERCIZIO N° 3b

(http://www.diss.uniroma1.it/moodle2/pluginfile.php/363/course/section/1114/esCalcoloCombinatorio_ProfRomagnoliUNITO.pdf)
Quanti numeri di sei cifre hanno almeno una cifra pari?

Soluzione: Abbiamo dieci cifre (0,1,…,9) : di queste ve ne sono cinque pari (0,2,4,6,8) e cinque dispari (1,3,5,7,9) . Vi sono $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 900000$ numeri con sei cifre (per la prima cifra devo escludere lo 0 e quindi ho 9 scelte anziché 10) e $5^6 = 15625$ numeri con sei cifre tutte dispari. I numeri di sei cifre aventi almeno una cifra pari sono quindi 900000 – 15625 = 884375 .

ESERCIZIO N°3c

(www.diss.uniroma1.it/moodle2/.../esCalcoloCombinatorio_ProfRomagnoliUNITO.pdf)
In una regione vi sono venti città, collegate a coppie da una strada comunale.
Quante strade comunali possiede la regione in questione ?

Soluzione: Osserviamo che ogni strada collega due diverse città. Abbiamo 20 scelte diverse per la partenza e 19 per l'arrivo di una strada: le scelte possibili sono quindi $20 \cdot 19$. In tal modo però ogni strada ab è stata contata due volte: una volta con a città di partenza e b di arrivo e una volta con b partenza e a arrivo; ne segue che il numero cercato è $(20 \cdot 19) : 2 = 190$.

ESERCIZIO N°3d

(www.diss.uniroma1.it/moodle2/.../esCalcoloCombinatorio_ProfRomagnoliUNITO.pdf)
Quante diagonali ha un poligono convesso di n lati?

Soluzione: Osserviamo che ognuno degli n vertici può essere scelto come primo punto di una diagonale, mentre come scelta per il secondo punto dobbiamo escludere il vertice in questione e i due a lui adiacenti. Abbiamo dunque $n – 3$ scelte per il secondo punto di ogni diagonale ed n scelte per il primo. Il prodotto delle scelte deve però essere diviso per due, per le stesse argomentazioni dell'esercizio **3c**. Dunque le diagonali di un poligono di n lati sono: $n(n – 3)/2$.

ESERCIZIO N°3e

(www.diss.uniroma1.it/moodle2/.../esCalcoloCombinatorio_ProfRomagnoliUNITO.pdf)
Uno studente deve sostenere 5 esami ogni anno per i 4 anni di durata del suo corso di studi, senza poter rimandare un esame da un anno all'altro, nell'ordine da lui preferito.

Quante sono le possibili sequenze dei 20 esami?

Soluzione: $5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!$

ESERCIZIO N°7a

(http://www.diss.uniroma1.it/moodle2/pluginfile.php/363/course/section/1114/esCalcoloCombinatorio_ProfRomagnoliUNITO.pdf)

a) Da un mazzo di carte vengono estratte 5 carte una dietro l'altra senza che le carte estratte vengano ogni volta reinserite nel mazzo.
Quante sono le possibili estrazioni ordinate?

Soluzione: Poiché le carte estratte non vengono reinserite, si tratta di enumerare le disposizioni senza ripetizione a 5 a 5 delle 52 carte del mazzo. In questo caso è $n = 52$ e $k = 5$, si ha quindi: $D_{52,5} = =52{\cdot}51{\cdot}50{\cdot}49{\cdot}48 = 52!/47!$.

ESERCIZIO N°7b

(www.diss.uniroma1.it/moodle2/.../esCalcoloCombinatorio_ProfRomagnoliUNITO.pdf)
Il noto cuoco parigino Paul Auvent prepara i suoi manicaretti nel modo seguente:
egli ha tre scaffali con 7, 6 e 5 ingredienti tutti distinti, rispettivamente, e sceglie 3 ingredienti dal primo, 4 dal secondo e 2 dal terzo; mette tutto in un pentolone con acqua calda e fa bollire per due ore.

Quante sono le ricette di Paul Auvent?

Soluzione: Siano A, B e C gli insiemi degli ingredienti sul primo, sul secondo e sul terzo scaffale, rispettivamente. Ogni ricetta corrisponde a un elemento del prodotto cartesiano $p(A_3) \cdot p(B_4) \cdot p(C_2)$, e

quindi le possibili ricette sono
in numero di

$$p(A_3) \cdot p(B_4) \cdot p(C_2) = \binom{7}{3} \binom{6}{4} \binom{5}{2} = 35 \,.\, 15 \,.10 = 5250.$$

ESERCIZIO N° 10a

(Da: Olimpiadi della Matematica – 2011)

Ad una fiera c'è un gioco molto invitante, perché si può partecipare gratis; chi vince guadagna un premio. Il premio pattuito per le prime quattro partite è una moneta, per la quinta è di due monete. Nicola ad ogni partita ha probabilità di vincere il premio e decide di giocare 5 partite. Qual è la probabilità che Nicola vinca almeno 4 monete?

Soluzione: Consideriamo separatamente i casi in cui Nicola abbia rispettivamente perso e vinto l'ultima partita. Nel primo caso (che avviene con probabilità 1/3) Nicola deve aver vinto le prime quattro partite, evento che ha probabilità pari a $\left(\frac{2}{3}\right)^4$. Nel secondo caso (che avviene con probabilità 2/3), Nicola deve non aver perso più di due partite tra le prime quattro: quest'ultimo evento ha probabilità complementare rispetto a quella di perdere tutte le prime quattro partite, o di vincerne esattamente una su quattro. Segue che la probabilità cercata è:

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3\right] = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{160}{243} \quad .$$

ESERCIZIO N°10b

(http://progettomatematica.dm.unibo.it/ProbElem/12esercizi.html)

Un tipo di missile ha la probabilità 30% di colpire il bersaglio. Quanti missili si devono lanciare affinché la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta sia non inferiore all'80%.

Soluzione:
Evento A: il missile colpisce almeno una volta il bersaglio

Evento CA: il missile non colpisce mai il bersaglio

$p(A) = 1- p(CA)$; $p(CA) = (1-0,30)^n = (0,70)^n$;

$$p(A) = 1-(0,70)^n \geq 0,80; \quad 0,20 \geq (0,70)^n;$$

$$n \leq \frac{log 0,7}{log 0,2} \cong 4,5 \quad .$$

Bastano quindi 4 missili.

ESERCIZIO N°11a

(http://progettomatematica.dm.unibo.it/ProbElem/12esercizi.html)

Un'urna contiene 2 biglie bianche e 5 nere. Estraiamo una prima biglia: se è nera la rimettiamo dentro con altre due biglie dello stesso colore, se è bianca non rimettiamo niente nell'urna.

Estraendo la seconda biglia, qual è la probabilità che sia nera?

Soluzione:
Applichiamo la formula

$$p(B) = p(B\backslash A)p(A) + p(B\backslash CA)p(CA) \ .$$

Evento N_1: prima biglia nera   Evento N_2: seconda biglia nera

Evento B_1: prima biglia bianca

$$p(N_2) = p(N_2\backslash N_1) \cdot p(N_1) + p(N_2\backslash B_1) \cdot p(B_1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{7} + \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{7} \cong 0{,}79.$$

ESERCIZIO N°14

(http://progettomatematica.dm.unibo.it/ProbElem/12esercizi.html)

Uno studio medico sulla tubercolosi (TBC) effettuato su una certa popolazione di individui ha dato i seguenti risultati, che costituiscono i dati del nostro problema:

P(TBC) = 0,001
P(test positivo/TBC) = 0,999
P(test positivo/non TBC) = 0,002 (falso allarme)
(la probabilità dell'evento "test negativo e individuo ammalato" costituisce invece il mancato allarme. Dato che il suddetto evento è il complementare di "test positivo e individuo ammalato", la sua probabilità è 1-0,999=0,001)

Determinare la probabilità che un certo individuo abbia la tubercolosi, se risulta positivo al test.

Soluzione:
Applichiamo il teorema di Bayes:

$$p(TBC\backslash test\ positivo) = \frac{p(test\ positivo\backslash TBC) \cdot p(TBC)}{p(test\ positivo\backslash TBC) \cdot p(TBC) + p\big(test\ positivo\backslash C(TBC)\big) \cdot p\big(C(TBC)\big)} = \frac{0{,}999 \cdot 0{,}001}{0{,}999 \cdot 0{,}001 + 0{,}002 \cdot (1 - 0{,}001)} \cong 0{,}33 \quad .$$

Quindi nonostante la probabilità di falso allarme pari a 0,2% e di mancato allarme pari a 0,1%, la probabilità di avere la tubercolosi in caso di test positivo è solo del 33%, quindi non molto elevata.

Bibliografia.

Francesca Bardin, dispense di "Calcolo combinatorio e calcolo delle probabilità", 2006/2007.

Paola Domingo, "Aspetti paradossali in problemi di probabilità", Gruppo di Ricerca e Educazione in Matematica dell'Università di Genova, Dipartimento di Matematica.

Sheldon M. Ross, Calcolo delle probabilità, Apogeo, 2004.

Claudia Benedetti, “Probabilità a scuola: un percorso di condivisione dei registri semiotici”, Tesi d’abilitazione all’Insegnamento nella Scuola Secondaria, SISSIS, Università di Bologna, 2000.

Siti web

http://progettomatematica.dm.unibo.it/ProbElem/5definiz.html

http://progettomatematica.dm.unibo.it/ProbElem/12esercizi.html

https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Bayes

http://matematica.unibocconi.it/

http://matematica-old.unibocconi.it/interventi/bovetti/azzardo2.htm

http://www.matematica.it/paola/problema delle parti.pdf

www.matematicamente.it/staticfiles/teoria/probabilita/PROBAB_1.pdf

www.math.unipd.it/~bianchi/didattica/PSM/exe_EPC.pdf

www.matapp.unimib.it/~bianca/triennale/pillole_combinatorio.pdf

http://utenti.quipo.it/base5/probabil/montyhall.htm

www1.unipa.it/sanfilippo/pub/stad/compiti/RaccoltadiEsercizidiProbabilita.pdf

http://www.diss.uniroma1.it/moodle2/pluginfile.php/363/course/section/1114/esCalcoloCombinatorio_ProfRomagnoliUNITO.pdf