Probabilità e Statistica nelle Tavole degli Apprendimenti – Idee e Suggerimenti

Aniello (Nello) Buonocore

Progetto LogicaMente – Città della Scienza, Napoli 25 settembre 2014

Premessa

Questa presentazione è strutturata in tre parti: “l’antefatto” normativo, una possibile e concreta “soluzione”, idee per riempire alcune delle “scatole” necessarie per risolvere il “rompicapo”.

Per chiarezza, devo immediatamente far presente che la farina del mio sacco è stata solo quella necessaria ad organizzare materiale (articoli di legge e articoli di riviste, proposte operative, strumenti e metodi) prodotto da varie persone e organizzazioni, nel tentativo di esplicitare un ragionamento che oramai in tanti conoscono ma che ha ancora bisogno del raggiungimento di una massa critica per la sua effettiva concretizzazione.

Le frasi riportate dalle varie fonti citate sono in carattere corsivo; dovunque compare il carattere in grassetto è, per la gran parte, una mia scelta.

Riferimenti Normativi

Regolamenti di riordino dei licei, degli istituti tecnici e degli istituti professionali emanati dal Presidente della Repubblica in data 15 marzo 2010 (Registrati alla corte dei conti in data 1 giugno 2010)

1) Indicatori Nazionali per i Licei.
2) Linee guida per gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali.

http://archivio.pubblica.istruzione.it/riforma_superiori/nuovesuperiori/index.html
http://www.orizzontescuola.it/didattica/indicazioni-nazionali-i-licei

Nota Introduttiva

… Le Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei rappresentano la declinazione disciplinare del Profilo educativo, culturale e professionale dello studente a conclusione dei percorsi liceali. Il Profilo e le Indicazioni costituiscono, dunque, l'intelaiatura sulla quale le istituzioni scolastiche disegnano il proprio Piano dell'offerta formativa, i ***docenti costruiscono i propri percorsi didattici e gli studenti raggiungono gli obiettivi di apprendimento e maturano le competenze*** *proprie dell'istruzione liceale e delle sue articolazioni . …*

Il rapporto tra il Profilo educativo culturale e professionale dello studente e le Indicazioni nazionali

… Il Profilo indica inoltre i risultati di apprendimento comuni all'istruzione liceale, divisi nelle cinque aree (…) e, infine, descrive i risultati peculiari a ciascun percorso liceale. Si tratta in parte di risultati trasversali, cui concorrono le diverse discipline, che chiamano in causa ***la capacità progettuale del corpo docente*** *e costituiscono l'ideale intelaiatura dei singoli Piani dell'Offerta Formativa. Costituiscono dunque gli obiettivi fondamentali che le Istituzioni scolastiche sono chiamate non solo a raggiungere,* ***ma ad arricchire in base alla propria storia, al collegamento col territorio, alle proprie eccellenze e alle professionalità presenti nel corpo docente****, …*

Obiettivi, competenze e autonomia didattica

… Le Indicazioni non dettano alcun modello didattico-pedagogico. Ciò significa favorire la sperimentazione e lo scambio di esperienze metodologiche, ***valorizzare il ruolo dei docenti*** *e delle autonomie scolastiche nella loro libera progettazione e negare diritto di cittadinanza, in questo delicatissimo ambito, a qualunque tentativo di prescrittivismo.* ***La libertà del docente*** *dunque* ***si esplica non solo nell'arricchimento di quanto previsto nelle Indicazioni,*** *in ragione dei percorsi che riterrà più proficuo mettere in particolare rilievo e della specificità dei singoli indirizzi liceali,* ***ma nella scelta delle strategie e delle metodologie più appropriate****, la cui validità è testimoniata non dall'applicazione di qualsivoglia procedura, ma dal successo educativo. …*

LINEE GENERALI E COMPETENZE

… Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:

1) gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);

2) gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, una buona conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi, le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale;

3) gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali, in particolare l'equazione di Newton e le sue applicazioni elementari; →

LINEE GENERALI E COMPETENZE

4) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;

5) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);

6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;

→

LINEE GENERALI E COMPETENZE

7) una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;

8) una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ("invarianza delle leggi del pensiero"), della sua diversità con l'induzione fisica ("invarianza delle leggi dei fenomeni") e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico. …

→

LINEE GENERALI E COMPETENZE

Questa articolazione di temi e di approcci costituirà la base per istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali e sociali, la filosofia e la storia.

Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo.

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO PRIMO BIENNIO

Dati e previsioni

Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate ***le definizioni e le proprietà dei valori medi*** *e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche.* ***Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti.*** →

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO PRIMO BIENNIO

Dati e previsioni

Lo studente sarà in grado di ricavare semplici inferenze dai diagrammi statistici.

Egli apprenderà ***la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici*** *e con l'introduzione di nozioni di statistica.*

Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO SECONDO BIENNIO

Dati e previsioni

Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui ***i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti****, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione.*

Studierà la probabilità condizionata e composta*, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché* ***gli elementi di base del calcolo combinatorio****.*

In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO QUINTO ANNO

Dati e previsioni

Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come ***la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson****).*

In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi.

Le Tavole degli Apprendimenti

… Oggi –si è detto– si privilegia la personalizzazione del curricolo sia con riferimento all'insegnamento che all'apprendimento. Non è un fatto da poco. ***È un principio educativo che è stato recepito nella legge che regola il nostro sistema educativo dell'istruzione e della formazione****. È il principio che è in atto nelle scuole del primo ciclo dal 2004 e nel secondo ciclo dal 2010. È il principio che ha abolito i programmi d'insegnamento* ***ministeriali*** *e li ha sostituiti con le Indicazioni Nazionali e le Linee Guida.* ***Se non si comprende questo principio non si può comprendere il compito assegnato a scuole e docenti e, …***

Tratto dall'editoriale dell'ispettore Emilio Ambrisi nel numero 1/2014 della rivista "Periodico di matematiche" organo della Mathesis. Il testo in corsivo nelle pagine successive, se non diversamente esplicitato, è tratto dalla medesima fonte. →

Le Tavole degli Apprendimenti

… Forse il modo migliore, più rapido ed efficace, per descrivere il lavoro effettuato, le idee e le tensioni che lo hanno motivato e animato, è lasciar parlare le tavole degli apprendimenti già realizzate. ***È probabile che comunichino in modo più rapido e chiaro quali debbano essere i risultati matematici posti a traguardo dell'azione didattica sviluppata da scuole e docenti.*** *…*

→

La Tavola degli Apprendimenti - primo biennio
LA GALLERIA MATEMATICA

Il quadro vuole indicare in forma rapida e sintetica i traguardi di conoscenze, abilità e competenze matematiche fissati dalle Indicazioni Nazionali e dalle Linee Guida per il primo biennio degli indirizzi di studio della scuola secondaria di secondo grado.

I risultati di apprendimento sono sistemati in un quadro (La galleria dell'Arciduca Leopoldo Guglielmo a Bruxelles) *del 1651 di David Teniers il giovane (1610-1690). Ciascuno di essi, come un'opera d'arte, è incorniciato e posto in mostra in una* ***galleria matematica dei traguardi di apprendimento del primo biennio****. Una tavola, cioè, da esporre in ogni aula quale riferimento per l'azione didattica dei docenti e l'impegno degli studenti …* →

La Tavola degli Apprendimenti - primo biennio
LA GALLERIA MATEMATICA

La Tavola degli Apprendimenti - primo biennio

I sedici prodotti dell'arte matematica

1. Il polinomio $P(x)$ è divisibile per $x - a$ se e solo se $P(a) = 0$.
2. La somma degli angoli esterni di un poligono … è … invariante.
3. La divisione di un segmento in n parti proporzionali.
4. La radice di 2 è un numero irrazionale.
5. Fattorizzazione di un trinomio di 2° grado.
6. Dimostrare il teorema di Pitagora.
7. La proprietà distributiva $a(b + c) = ab + ac$.
8. Un altro invariante: il teorema dei seni.
9. Costruire la sezione aurea di un segmento. $\longrightarrow$

La Tavola degli Apprendimenti - primo biennio

I sedici prodotti dell'arte matematica

11. La gerarchia degli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
12. **La probabilità è un numero compreso tra 0 e 1.**
13. **Le medie e la disuguaglianza** $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
14. I numeri irrazionali del tipo $\sqrt{a}$: approssimazione numerica e costruzione geometrica.
15. Disegnare, nel piano cartesiano, il grafico di $ax + by + c = 0$.
16. Disegnare, nel piano cartesiano, il grafico di una funzione di 2° grado.
17. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x-3} + \sqrt{y+7} = 8 \\ x + y = 30. \end{cases}$$

La Tavola degli Apprendimenti - primo biennio
LA GALLERIA MATEMATICA

… Ciascun elemento della lista gioca il ruolo di quello che altrove chiamano ***curriculum focal point****. Un punto cioè che è di accumulazione di conoscenze, abilità e competenze; qualcosa che specifica il contenuto matematico da conoscere accuratamente per l'apprendimento della matematica in futuro e* ***soprattutto è tale da costituire il riferimento per la costruzione di itinerari didattici la cui unione sia il ricoprimento di quanto previsto che si insegni e si apprenda****. … Il quadro è frutto di un lavoro cha coinvolto,* ***in un progetto realizzato dal MIUR, centinaia di docenti in servizio nelle scuole delle varie regioni d'Italia*** *ed è stato presentato nelle Giornate Matematiche che si sono svolte nell'arco dell'a.s. 2012/13 in tutte le regioni …*

La Tavola degli Apprendimenti del primo biennio
Due ulteriori commenti

… Ciascun punto della lista ha la funzione di guidare il docente nella sua progettazione didattica, nella definizione del suo programma d'insegnamento. Il docente, in questo modo, sa qual è il traguardo, sa dove gli si chiede di arrivare. Una meta che può raggiungere come vuole, scegliendo ***metodi, strumenti, linguaggi, esempi che arricchiscono di significato, applicazioni che contestualizzano, riferimenti storici*** *e, sempre calibrando i tempi, seguendo un itinerario che attraversa i capitoli tradizionali,* ***connette variamente teoremi ed algoritmi per coglierne in una visione unificatrice, particolari e generalizzazioni****. …*

→

La Tavola degli Apprendimenti del primo biennio
Due ulteriori commenti

… La selezione dei risultati di apprendimento da perseguire sistemati anche in una forma più chiara ed efficace avvantaggia il docente per il fatto che anche gli studenti possono averne conoscenza, esserne informati preventivamente. ***In questo modo gli studenti sanno per che cosa si impegnano, che cosa si chiede che essi sappiano e sappiano fare a conclusione del primo biennio.*** *In definitiva come i docenti, anche gli studenti sono messi nelle condizioni di conoscere e di condividere le tappe del proprio impegno di studio e lavoro.*

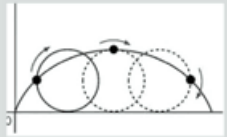
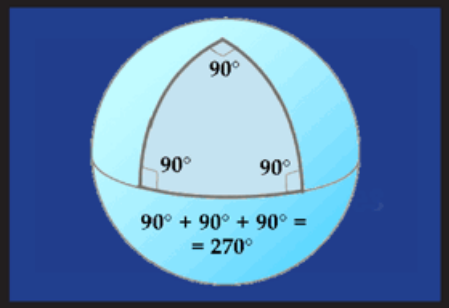
La Tavola degli Apprendimenti quinto anno LS
LA TAVOLA DI MONDRIAN

… I risultati di apprendimento sono sistemati in un quadro di Piet Mondrian (1872–1944). Il quadro vuole indicare in forma rapida e sintetica i traguardi di conoscenze, abilità e competenze matematiche fissati dalle Indicazioni Nazionali per il quinto anno del Liceo Scientifico.

… Il quadro contiene teoremi e principi, formule e procedure, problemi e forme geometriche esposti come in una galleria d'arte matematica. ***"Fatti" matematici percepibili, comprensibili, di cui si può parlare e dibattere. In ciascuno di essi si addensano altri concetti, altre idee e procedure che è possibile collegare in un'unica trama concettuale, logica, applicativa****. …*

→

La Tavola degli Apprendimenti quinto anno LS
LA TAVOLA DI MONDRIAN

	Qual è il grafico di $y = f(x)$?	$e^{i\pi} + 1 = 0$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	Esistono solo cinque poliedri regolari
Equazioni di luoghi geometrici	Permutazioni Disposizioni Combinazioni	Come approssimare e, π, φ		$\aleph_0$ Chi è *aleph-zero*?
I teoremi di *Lagrange*, *Rolle*, *l'Hôpital*	Problemi di massimo e minimo Il principio di induzione	Applicazione degli integrali al calcolo di aree e volumi	Dall'andamento del grafico alla possibile espressione analitica della funzione	Come approssimare un integrale definito
Principio di Cavalieri	Cos'è un sistema assiomatico?	Quante volte devo giocare al lotto per vincere?	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	

La Tavola degli Apprendimenti quinto anno LS
Le ventuno stelle fisse

1. Equazioni parametriche di curve nel piano.
2. Qual è il grafico di $y = f(x)$?
3. L'identità di Eulero: $e^{i\pi} + 1 = 0$.
4. Risoluzione approssimata di equazioni:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
5. Esistono solo cinque poliedri regolari.
6. Equazioni di luoghi geometrici.
7. **Permutazioni, disposizioni, combinazioni**.
8. Come approssimare e, π, φ.
9. Geometrie non euclidee.

La Tavola degli Apprendimenti - quinto anno LS
Le ventuno stelle fisse

10. Confronto tra insiemi infiniti: Chi è *aleph-zero* ($\aleph_0$)?
11. I teoremi di *Lagrange, Rolle, l'Hôpital*.
12. Problemi di massimo e minimo
13. Il principio di induzione.
14. Applicazione degli integrali al calcolo di aree e volumi.
15. Dall'andamento del grafico alla possibile espressione analitica della funzione.
16. Come approssimare un integrale definito.
17. Principio di Cavalieri.
18. Cos'è un sistema assiomatico.
19. **Quante volte devo giocare al lotto per vincere?** →

La Tavola degli Apprendimenti - quinto anno LS

Le ventuno stelle fisse

20. La funzione di densità gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

21. Geometria euclidea nello spazio.

La Tavola degli Apprendimenti - quinto anno LS
Due ulteriori commenti

… Una guida per docenti e discenti . … Un modo efficace per corrispondere, senza rovinosi eccessi, alle tante esigenze didattiche, e anche una "flipped classroom". ***Una classe capovolta: studiare a casa e lavorare in classe, confrontarsi sul lavoro svolto, su significati e applicazioni, storia e connessioni da cogliere e organizzare****.*

→

La Tavola degli Apprendimenti - quinto anno LS
Due ulteriori commenti

… Una tavola che è anche una ***essenzializzazione di Syllabus per la prova scritta di matematica agli esami di Stato*** *e uno strumento per realizzare un concreto cambiamento di prospettiva: dall'attenzione verso i punti di partenza del discorso matematico, allo sguardo rivolto ai punti di arrivo, dove si vuole arrivare.*

… Dunque, la ri-organizzazione dei percorsi didattici in funzione dei risultati di apprendimento da perseguire e da raggiungere …

La Tavola degli Apprendimenti - scuola secondaria di primo grado (in allestimento)

1. I numeri sulla retta. Il piano cartesiano.
2. Il numero π, la misura del cerchio e della circonferenza.
3. Invarianti: il rapporto di similitudine.
4. Scomporre un numero in fattori primi.
5. Stimare l'area di una figura delimitata da linee curve.
6. Volumi e superfici delle figure solide.
7. Leggi di proporzionalità: rappresentare
   $$y = ax \text{ e } y = a/x.$$
8. Equazioni di primo grado.
9. Stimare la radice quadrata di un numero naturale: irrazionalità. $\longrightarrow$

La Tavola degli Apprendimenti - scuola secondaria di primo grado (in allestimento)

10. Uso di riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria.
11. Teorema di Pitagora.
12. Variazioni percentuali.
13. Le funzioni $y = ax^2$ e $y = 2^n$.
14. **Calcolare la probabilità di qualche evento.**
15. **Eventi complementari, incompatibili, indipendenti.**
16. **Moda, mediana, media aritmetica**.

E LogicaMente …?

… Il progetto intende promuovere nelle scuole secondarie, l'insegnamento e l'apprendimento della Matematica basati sull'indagine razionale e sperimentale e sul laboratorio di Matematica, in accordo con la metodologia La main à la pâte.
…

… Le metodologie sopra indicate sono state sperimentate nel nostro paese attraverso l'impegno di molti docenti …

Tratto dal programma operativo del progetto LogicaMente inviato ai Dirigenti Scolastici delle Istituzioni Scolastiche della Regione Campania. →

E LogicaMente …?

… Si ritiene tuttavia utile e importante dare un ulteriore contributo, per sviluppare maggiormente la metodologia didattica del Laboratorio di Matematica, ***che qui intendiamo non tanto come luogo fisico attrezzato, quanto come momento in cui lo studente, guidato sapientemente dal docente, progetta e conduce osservazioni sperimentali sugli oggetti e sui fenomeni matematici, interpreta i risultati, formula semplici previsioni e congetture, intuisce i concetti e si avvia all'argomentazione logica discutendone con i compagni e con i docenti.*** *…*

Tratto dal programma operativo del progetto LogicaMente inviato ai Dirigenti Scolastici delle Istituzioni Scolastiche della Regione Campania. →

E LogicaMente …?

… Occorre far circolare il messaggio che la Matematica che insegniamo a scuola viene sì dai grandi pensatori del passato ed è perfettamente collaudata, ma la sua trasmissione ai giovani ha molti gradi di libertà e risente dell'evoluzione del mondo …

Tratto dal programma operativo del progetto LogicaMente inviato ai Dirigenti Scolastici delle Istituzioni Scolastiche della Regione Campania.

Suggerimenti in ordine sparso

PAUL LOCKHART
"A Mathematician's Lament"
MAA Online, (2008)
(Traduzione di Fausta Zibetti all'indirizzo http://www.xlatangente.it/page.php?pid=2760)

Paul is a mathematics teacher at Saint Ann's School in Brooklyn, New York. His article has been circulating through parts of the mathematics and math ed communities ever since, but he never published it. I came across it by accident a few months ago, and decided at once I wanted to give it wider exposure. I contacted Paul, and he agreed to have me publish his "lament" on MAA Online. It is, quite frankly, one of the best critiques of current K-12 mathematics education I have ever seen. Written by a first-class research mathematician who elected to devote his teaching career to K-12 education.

Keith Devlin
Executive Director of the Center for the Study of Language and Information at Stanford University

Suggerimenti in ordine sparso

I dieci principi del metodo "La main à la pâte"

1. *I bambini osservano un oggetto (di studio) o un fenomeno del mondo reale, a loro vicino e per loro significativo, e sperimentano su di esso.*
2. *Durante le loro investigazioni i bambini riflettendo e argomentando, discutendo le proprie idee e risultati confrontandosi con gli altri, costruiscono le proprie conoscenze, poiché un'attività puramente manuale non è sufficiente.*
3. *Le attività proposte dagli insegnanti agli allievi sono organizzate in sequenza, in vista di un apprendimento progressivo; riprendono i temi dei programmi nazionali e lasciano un grande spazio all'autonomia degli allievi.*
4. *Un tempo minimo di 2 ore per settimana, per numerose settimane. Per tutte le attività scolastiche va garantita una continuità nell'approccio pedagogico-didattico.*
5. *Ogni alunno possiede un quaderno delle esperienze dove queste sono raccontate utilizzando il loro linguaggio naturale.*
6. *Il principale obiettivo consiste nell'appropriazione progressiva, da parte degli alunni, di concetti scientifici e di tecniche operatorie, accompagnata da un consolidamento dell'espressione scritta e orale.*
7. *Le famiglie e/o le agenzie e i soggetti che operano nel territorio sono coinvolti nelle attività realizzate in classe.*
8. *A livello locale, partner scientifici (università, grandi scuole) accompagnano il lavoro di classe mettendo a disposizione le loro competenze.*
9. *A livello locale, gli IUFM mettono a disposizione degli insegnanti le loro esperienze pedagogiche e didattiche.*
10. ***L'insegnante può ottenere presso il sito Internet http://www.inrp.fr/lamap dei moduli (lezioni) da mettere in opera, delle idee di attività, delle risposte alle sue domande. Può anche partecipare a un lavoro cooperativo con dei colleghi, dei formatori e degli scienziati.***

Suggerimenti in ordine sparso

CLAUDIA BENEDETTO

"Probabilità a scuola: un percorso di condivisione dei registri semiotici"

Tesi di abilitazione all'Insegnamento nella Scuola Secondaria. SSIS-Università di Bologna

Se ciascuno studente, in base ai propri stili cognitivi seleziona particolari registri e li utilizza per affrontare con successo semplici problemi, sarà incoraggiato successivamente a confrontarsi con situazioni in cui questi registri sono insufficienti.

Se si chiede a ciascun allievo di illustrare ai compagni (insegnante compresa) i registri utilizzati e viceversa di impegnarsi a capire ed applicare quelli proposti dagli altri (insegnante compresa), gli studenti ***collocheranno l'attività di conversione all'interno di una necessità comunicativa e non per assecondare la richiesta dell'insegnante****.*

Suggerimenti in ordine sparso

DOMINGO PAOLA
"Il problema delle parti: prassi didattica e storia della matematica"
Didattica delle Scienze, **198**, 31–36 (1998)

In questo lavoro presento un'esperienza effettuata in una classe di quinta ginnasio nella quale ho utilizzato un problema classico del calcolo delle probabilità per avviare una riflessione sul concetto di "gioco equo". Mi soffermo, in particolare, sulle strategie risolutive scelte dai vari gruppi degli studenti per affrontare il problema e ne discuto le analogie con le soluzioni che via via hanno proposto, nel corso della storia, alcuni matematici che si sono occupati del problema. ***Spero che la descrizione e la discussione dell'esperienza possano offrire spunti e suggerimenti per attività analoghe che intendano avvalersi della storia della matematica come fonte di problemi significativi.***

Suggerimenti in ordine sparso

GIORGIO T. BAGNI, MARIA PIA PERELLI D'ARGENZIO, SILIO RIGATTI LUCHINI

"Ancient Zara game and teaching of Probability: an experimental research in Italian High School"

Proceedings of MCOTS-2, Department of Mathematics University of Wisconsin, Oshkosh, WI, USA (June 25 – 27, 1999)

This work is the beginning of a research activity on a first approach to probability from an informal point of view. We presented to students aged 17-18 a class activity based upon a simplified version of an ancient game named Zara. This game is famous in Italy because it is quoted by Dante Alighieri in Purgatorio, VI, 1-3, and by Galileo Galilei. It is interesting to underline that students adopt Laplace first and second principles without knowing them; according with Laplace ideas, several students made mistakes in non-symmetric probabilities. ***In this research the use of historical examples, combined with activity linked to everyday life, allows an effective approach to concepts of Probability.***

Suggerimenti in ordine sparso

LEONARD GILLMAN
"The Car and the Goats"
American Mathematical Monthly, **99**, 3–7 (1992)

… I call this Game I. It appeared in the Ask Marilyn *column in* Parade *(a Sunday supplement) … Marilyn asserted that you should switch, arguing that the probability of winning, originally 1/3, had now gone to 2/3. ("**Marilyn" is standard terminology**.) This lead to an uproar featuring "thousands" of letters, nine-tenths of them insisting that with door #3 now eliminated, #1 and #2 were equally likely; even the responses from college faculty voted her down two to one … **There is no denying that the problem is tricky (even though, technically speaking, it involves only undergraduate mathematics).** The purpose of this article is to unravel it all.*

Idee da sviluppare

Ricercare "ambientazioni didattiche" che favoriscano la costruzione di percorsi unificanti

LE MEDIE ANALITICHE DI CHISINI

OSCAR CHISINI
"Sul concetto di media"
Periodico di Matematiche **2**, 106–116, (1929)

SILVANO HOLZER
"Sulla nozione di media"
Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università del Salento **1**, 74–86 (1991)

ANIELLO BUONOCORE
"Sulle medie di Chisini: l'idea ed alcuni esempi"
Fare matematica insieme: istruzioni per l'uso
A cura di M. Lapegna - Liguori Editore (2013)

Idee da sviluppare

Ricercare "ambientazioni didattiche" che favoriscano la costruzione di percorsi unificanti

LE MEDIE COME CENTRI

- Centro di ordine 0 : Moda
- Centro di ordine 1 : Mediana
- Centro di ordine 2 : Media
- Centro di ordine ∞ : Valore centrale

(Distanza di un punto da un insieme; funzione valore assoluto, funzione potenza ad esponente razionale, minimo di una funzione.)

Idee da sviluppare

Ricercare "ambientazioni didattiche" che favoriscano la costruzione di percorsi unificanti

I MODELLI DI OCCUPAZIONE

Bisogna collocare k biglie in n caselle numerate da 1 a n. Ogni collocazione è espressa come una k-selezione nell'insieme $\{1,2,\cdots,n\}$. Una casella è inospitale quando in essa può essere collocata al più una biglia.

- Caselle *ospitali* + Biglie *distinguibili* — disposizioni con ripetizione (statistica di Maxwell – Boltzmann)
- Caselle *inospitali* + Biglie *distinguibili* — disposizioni semplici
- Caselle *ospitali* + Biglie *indistinguibili* — combinazioni con ripetizione (statistica di Bose – Einstein)
- Caselle *inospitali* + Biglie *indistinguibili* — combinazioni semplici (statistica di Fermi – Dirac)

Idee da sviluppare

Ricercare "ambientazioni didattiche" che favoriscano la costruzione di percorsi unificanti

IL LANCIO DI UNA MONETA UN NUMERO INDEFINITO DI VOLTE

- Una generica prova: distribuzione di Bernoulli
- La somma di n prove: distribuzione binomiale
- Il guadagno unitario: distribuzione di Radamker
- Il guadagno in n prove: distribuzione di Radamker generalizzata
- Il primo ritardo: distribuzione geometrica

(Permutazioni con ripetizione, eventi indipendenti, trasformazioni.)

Idee da sviluppare

Incentivare l'uso di diversi registri linguistici e semiotici

REGISTRO ALGEBRICO - REGISTRO INSIEMISTICO

Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ oltre ad essere il numero delle possibili collocazioni di k biglie indistinguibili tra loro in $n \geq k$ celle inospitali rappresenta anche il numero dei sottoinsiemi con k elementi che si possono ottenere da un insieme avente n elementi.

Dopo di ciò nulla vieta di identificare $\binom{n}{0}$ con l'insieme vuoto così come sarà possibile argomentare una dimostrazione alternativa a quella algebrica per le formule che consentono la costruzione del triangolo di Tartaglia:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Idee da sviluppare

Incentivare l'uso di diversi registri linguistici e semiotici

REGISTRO LINGUISTICO - REGISTRO GRAFICO

Nel problema delle parti ecco la dimostrazione alla Pascal per una partita che dovrebbe terminare a 6 e che è interrotta sul punteggio di 5 a 3.

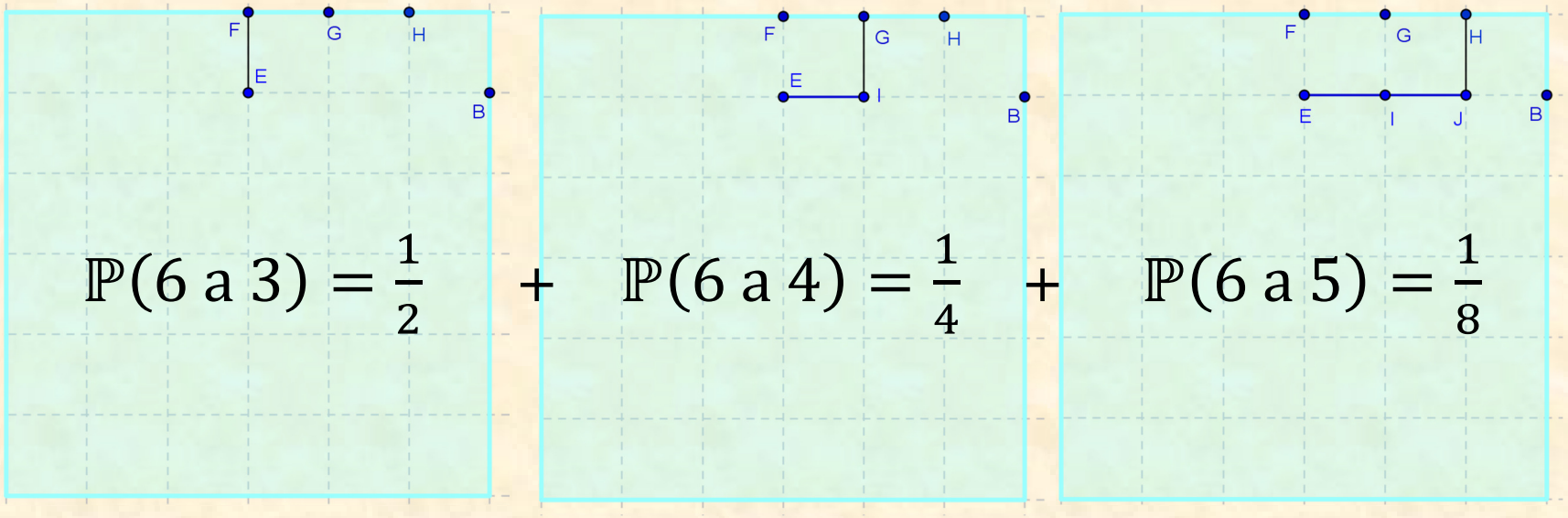
Sul punteggio di 5 *a* 3 *per Ariele, se si gioca un'altra partita e se Ariele vince, allora ad Ariele va l'intera posta, mentre se vince Calibano vanno sul* 5 *a* 4. *Allora ad Ariele spetta almeno metà della posta, ossia* 12 *denari. Sul* 5 *a* 4 *per Ariele, se si gioca un'altra partita e Ariele vince, allora ritira tutta la posta rimanente, mentre se vince Calibano vanno sul* 5 *a* 5. *Allora ad Ariele vanno, oltre ai* 12 *denari già stabiliti, almeno la metà dei* 12 *rimanenti, ossia* $12 + 6 = 18$. *Sul* 5 *a* 5 *si può giocare al più un'altra partita. Chi fra Ariele e Calibano vince ritira tutta la stessa posta rimanente. Quindi, se interrompono sul* 5 *a* 5 *devono dividersi la posta rimanente, ossia* 3 *denari a testa. Quindi, se il gioco viene interrotto sul* 5 *a* 3 *per Ariele, ad Ariele vanno* $12 + 6 + 3 = 21$ *denari, mentre a Calibano ne spettano* $24 - 21 = 3$. $\longrightarrow$

Idee da sviluppare

Incentivare l'uso di diversi registri linguistici e semiotici

REGISTRO LINGUISTICO - REGISTRO GRAFICO

La dimostrazione diventa maggiormente comprensibile adottando una rappresentazione grafica (diagramma reticolare) e la successiva formalizzazione.



$$\mathbb{P}(6 \text{ a } 3) = \frac{1}{2} \quad + \quad \mathbb{P}(6 \text{ a } 4) = \frac{1}{4} \quad + \quad \mathbb{P}(6 \text{ a } 5) = \frac{1}{8}$$

$\mathbb{P}(\text{“vince Ariele”}) = \frac{7}{8}$. Quindi, ad Ariele spettano $\frac{7}{8} \cdot 24 = 21$ monete.

Idee da sviluppare

Favorire l'uso di diversi registri linguistici e semiotici

ALGEBRA DEGLI INSIEMI - LOGICA DEGLI EVENTI

- $\emptyset$ è l'insieme vuoto ma è anche l'evento impossibile;
- $A \cup B$ è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A oppure a B oppure ad entrambi ma è anche l'evento che si verifica quando si verifica almeno uno tra gli eventi A e B;
- $A \cap B$ è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B ma è anche l'evento che si verifica quando si verificano entrambi gli eventi A e B;
- A^c è il complemento dell'insieme A ma è anche l'evento che si verifica quando A non si verifica;
- la relazione di de Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ esprime il fatto che l'evento negato di $A \cup B$ si verifica quando si verificano entrambi i negati degli eventi A e B.

Idee da sviluppare

Contestualizzare le attività facendo ricorso a problemi storici significativi

ESEMPI

- La questione posta da alcuni gentiluomini fiorentini a Galileo Galilei a proposito dell'antico **gioco della Zara**. (*Quando si parte il giuoco della zara / Colui che perde si riman dolente / Repetendo le volte, e tristo impara /* … Dante Alighieri, Purgatorio, VI, 1-3.) (Permutazioni e combinazioni semplici.)
- Il già richiamato **problema delle parti** (o della ripartizione della posta) oggetto di uno scambio epistolare tra B. Pascal e Fermat ma già affrontato da Cardano, da Luca Pacioli e successivamente ampliato e generalizzato da Huygens e De Moivre. Per inciso vale la pena di ricordare la critica alla soluzione (ripartizione in parti proporzionali al punteggio acquisito) di Pacioli espresso da Tartaglia con la seguente lucida obiezione " … chi ha zero punti non riceve nulla!".

Idee da sviluppare

Fare ricorso ad esempi che "arricchiscano di significato"

IL PROBLEMA DELLE CONCORDANZE

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

eventi che si verificano se si riscontra l'appaiamento richiesto al tentativo corrente e

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

l'evento che si verifica quando si riscontra almeno un appaiamento nell'intera procedura. Risulta:

$$1 - \mathbb{P}(A) = 1 + (-1) + \frac{(-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

(Permutazioni semplici e con ripetizione, eventi non incompatibili, ridotta della serie esponenziale per $x = -1$,approssimazione del numero di Nepero e.)

Idee da sviluppare

Fare ricorso ad esempi che "arricchiscano di significato"

IL PROBLEMA DEL COLLEZIONISTA

Bisogna riempire un album con m spazi per le figurine.

Supponendo che si acquisti una figurina alla volta, che l'editore imbusta le figurine in maniera del tutto casuale e che non ci sono scambi di doppioni, si vuole determinare il numero medio M di figurine da acquistare per riempire l'album. Risulta:

$$M = m\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) \approx \gamma + \ln m\,.$$

Si noti che per $m = 300$ risulta $M \approx 300 \cdot 6{,}28266388 \approx 1885$.

(Media di distribuzioni geometriche con parametro da individuare, ridotta della seria armonica, approssimazione della costante di Mascheroni γ.)

Idee da sviluppare

Fare ricorso ad esempi che "arricchiscano di significato"

L'AGO DI BUFFON

Nel suo "Essay d'arithmétique morale" del 1777 Georges-Louis Leclerc conte di Buffon descrive un esperimento casuale la cui effettuazione fornisce un metodo per approssimare il numero $1/\pi$. Precisamente disegnate sul pavimento delle linee parallele si lancia su di esso una bacchetta di lunghezza pari al doppio della distanza tra due linee consecutive. Detta p la probabilità che la bacchetta intersechi una delle linee, risulta:

$$p = 1/\pi.$$

(Legge empirica del caso, simulazioni reali e con Excel, metodo di Monte Carlo, approssimazione di $1/\pi$, calcolo di un'area per mezzo di un'integrale definito.)

Idee da sviluppare

Fare ricorso ad esempi che "arricchiscano di significato"

IL DILEMMA DI MONTY HALL

Descrizione. (1) Monty Hall (il conduttore di una trasmissione dal titolo "Let's Make a Deal") dispone "a caso" un'automobile fuoriserie dietro una di tre porte e una capra dietro ciascuna delle altre; (2) il concorrente sceglie una tra le tre porte che resta chiusa; (3) Monty Hall apre una delle altre due porte per mostrare che dietro di essa c'è una capra; (4) il concorrente ha la facoltà di confermare la porta (chiusa) inizialmente scelta oppure di optare per l'altra ancora chiusa; (5) Monty Hall apre la porta indicata dal concorrente al tempo (4) per verificare se dietro di essa c'è la fuoriserie.

Questione. È richiesto di determinare la "migliore" strategia adottabile dal concorrente per vincere la fuoriserie. →

Idee da sviluppare

Fare ricorso ad esempi che "arricchiscano di significato"

IL DILEMMA DI MONTY HALL

Posizioni. Il concorrente al tempo (2) sceglie la porta #1 e Monty Hall al tempo (3) apre la porta #3. Se così non fosse basterà **permutare** le targhette delle porte.

Analisi. Si indichi, per $i = 1,2,3$, con V_i l'evento "la fuoriserie è dietro la porta #i", e con C_3 l'evento "il conduttore al tempo (3) apre la porta #3". Per rispondere alla questione posta, che ovviamente riguarda il tempo (4), bisogna determinare la probabilità $P := \mathbb{P}_{C_3}(V_2) \equiv \mathbb{P}(V_2|C_3)$ e sulla base di essa individuare la migliore strategia: $P > 1/2$ comporta che è più conveniente cambiare la porta inizialmente scelta.

(Permutazioni, probabilità condizionata, teorema di Bayes, realizzazione reale delle partite, simulazione (ad esempio) con Excel, grafico della restrizione di una funzione razionale fratta.)

Conclusioni

È assodato che non ci sono più i programmi "ministeriali" che indirizzavano la libertà dei docenti verso lo zero.

È altresì evidente che adesso ci sono gli indicatori nazionali e le linee guida (con i loro obiettivi specifici d'apprendimento) che, invece, indirizzano la libertà dei docenti verso $+\infty$.

Da un eccesso all'altro?

Se si, allora bisogna fare qualcosa. Mettere dei vincoli condivisi è una delle soluzioni.

Conclusioni

Ed è questa la soluzione perseguita con ampiezza di vedute dalle *tavole degli apprendimenti*.

Se ci saranno altre soluzioni allora bisognerà tenerne conto, ma al momento non si può correre il rischio di fare mille, diecimila, centomila, ecc. scuole.

Altrimenti si potrà ottenere di fare zero scuole.

Se non vogliamo ciò, un tentativo di rendere concreta la profondità dei temi indicati nelle tavole degli apprendimenti va fatto.

Può essere una sfida avvincente e gratificante.