Laboratorio di Logica per il progetto lauree scientifiche
Il laboratorio di logica ha tra i suoi obiettivi
– una rivalutazione della componente formale;
– una maggiore consapevolezza nell'attività matematica;
– un insegnamento della matematica di spessore culturale
attraverso un percorso che risponda alla richiesta delle Indicazioni Nazionali:
… *gli elementi di logica non devono essere visti come una premessa metodologica a tutto il corso e in particolare all'attività dimostrativa, ma come una riflessione che si sviluppa man mano che matura l'esperienza matematica dell'allievo…Fin dall'inizio bisogna abituare lo studente all'uso appropriato del linguaggio e delle formalizzazioni, a esprimere correttamente le proposizioni matematiche e a concatenarle in modo coerente per dimostrare teoremi, mentre solo nella fase terminale del biennio si può pervenire allo studio esplicito delle regole di deduzione*…
Nel percorso che andiamo a presentare si privilegia un approccio inferenziale alla logica e al significato degli operatori logici, un approccio secondo il quale è il ruolo che gli operatori logici hanno in una deduzione che fissa il loro significato. Questa scelta è legata anche alla possibilità di evidenziare aspetti algoritmici e di meccanizzazione. Il percorso riguarda quella che viene detta *Logica Classica*. In particolare il laboratorio si è posto come obiettivo che gli studenti abbiano consapevolezza almeno dei seguenti punti (più o meno nell'ordine): l'infinito in matematica; differenza tra esempio e dimostrazione, tra esempio e contro esempio; esistenza in matematica di oggetti di cui è difficile costruire una immagine nella realtà; necessità (per i suddetti aspetti) della dimostrazione; dimensione linguistica delle dimostrazioni; importanza del linguaggio naturale come strumento di conoscenza; ruolo degli assiomi; problematiche metateoriche; correttezza di un ragionamento; necessità di separare semantica e sintassi al fine di evidenziare la struttura dei ragionamenti; schemi validi di ragionamento; (e solo a questo punto) le parole logiche.
Il percorso è un percorso integrato di storia e di attività preliminari all'introduzione dei concetti, attività dalle quali emergesse la necessità del concetto, attività che consentissero di capire alcuni argomenti *facendo* e, contemporaneamente, consentissero di collocarli nella loro necessità storica e nella loro necessità scientifico-matematica.

-*Perché le dimostrazioni in matematica*
Scopo: fare acquisire consapevolezza della presenza dell'**infinito** in matematica e quindi dell'importanza del concetto di **dimostrazione.** Infatti, a conclusione di queste prime attività, si apre la discussione sulla differenza tra insieme finito e insieme infinito, tra infinito potenziale e infinito in atto, sull'accettazione in matematica dell'infinito in atto, sull'esistenza di insiemi numerabili e insiemi più che numerabili, sulla necessità della dimostrazione perché si possa verificare la validità di alcune affermazioni, sulla scelta della dimostrazione anche nel caso finito per meglio comprendere le proprietà in gioco oltre che per brevità e eleganza, sull'esistenza di proposizioni non dimostrate e di proposizioni indimostrabili. Contemporaneamente è possibile analizzare il ruolo degli esempi, dei controesempi e dell'uso di diverse rappresentazioni.

1)**Scrivete un numero qualsiasi di tre cifre. Le cifre devono essere diverse.**
Scrivetelo ancora disponendo le cifre al contrario.
Sottraete il numero più piccolo dal più grande.
Scrivete il risultato al contrario.
Sommate insieme i due numeri.
Il risultato è 1089.
Verificate la validità della precedente affermazione:

- con degli esempi
- con una generalizzazione numerica

Esaminate e commentate la differenza tra i due procedimenti.

2) **La differenza tra i quadrati di due numeri consecutivi è sempre dispari**
Verificate la validità della precedente affermazione:

- con degli esempi
- con una rappresentazione geometrica
- con una generalizzazione numerica

Esaminate e commentate la differenza tra i tre procedimenti.

3) **La somma dei primi n numeri dispari è n^2**
Verificate la validità della precedente affermazione:

- con degli esempi
- con una rappresentazione geometrica
- con una generalizzazione numerica

Esaminate e commentate la differenza tra i tre procedimenti.

4) **Ogni numero pari diverso da 2 è somma di due numeri primi**
Verificate ciò che accade con degli esempi.
E' possibile verificate la validità della precedente affermazione con una generalizzazione numerica?

Come ulteriore spunto giochiamo con la Scacchiera mutilata e l'Albergo Infinito di Hilbert

Scacchiera mutilata

Da una classica scacchiera di 64 caselle si taglino i due angoli opposti. Rimangano 62 caselle. Si prendano 31 tessere di domino di dimensione tale da che ogni tessera ricopra esattamente due caselle. La domanda è:
è possibile disporre le 31 tessere del domino in modo che vengano ricoperte tutte le caselle della scacchiera?

Albergo di Hilbert

"Nel paese senza confini esiste il più grande di tutti gli alberghi: l'albergo con infinite stanze. Tuttavia anche gli ospiti sono infiniti, e il proprietario ha esposto un cartello con la scritta "COMPLETO". Ad un tratto si presenta un viaggiatore che ha assolutamente bisogno di una camera per la notte. Egli non fa questione di prezzo e infine convince l'albergatore, il quale trova il modo di alloggiarlo. Poco dopo arriva una comitiva di infiniti turisti, anche in questo caso l'albergatore si lascia convincere, in fondo si tratta di un grosso affare, e trova posto ai nuovi infiniti ospiti con la stessa facilità con cui aveva alloggiato l'ospite in più..."

-Esistenza in matematica di oggetti di cui è difficile costruire una immagine nella realtà
Esiste un cubo quadri-dimensionale? Quante parti ha un cubo quadridimensionale?

Questa prima parte porta a concludere che in matematica è necessario dimostrare. Quindi necessità della dimostrazione. Ma solo in matematica?
Può essere utile riprendere alcuni episodi della storia della fisica attraverso i quali far emergere sia la dimensione linguistica delle argomentazioni che la dimensione di strumento di conoscenza del linguaggio.
L'esempio della scoperta di Nettuno, fatta a tavolino, nacque dalla scelta, data l'eccessiva fiducia nella meccanica classica, di modificare la descrizione della realtà. Mentre come conseguenza della scelta di mettere in discussione proprio le leggi fisiche della teoria, si potrebbe fare l'esempio della introduzione della relatività ristretta da parte di Einstein

-Test di ingresso sulla correttezza di alcune inferenze

Esprimere in modo intuitivo un parere circa la correttezza o meno delle seguenti inferenze

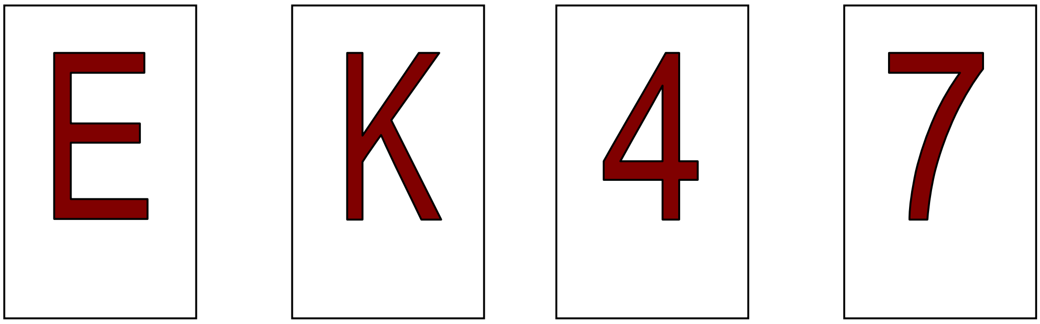
1	Pablo è un uccello <u>Normalmente gli uccelli volano</u> Quindi Pablo vola	
2	Pablo è un pinguino <u>Normalmente i pinguini non volano</u> Quindi Pablo non vola	
3	Pablo è un uccello <u>Tutti gli uccelli volano</u> Quindi Pablo vola	
4	Mario andrà alla festa oppure Sara andrà alla festa <u>Mario non andrà alla festa</u> Sara andrà alla festa	
5	<u>Romeo ama Giulietta</u> Quindi Giulietta ama Romeo	
6	Se c'è arrosto, allora c'è fumo <u>Non c'è fumo</u> Non c'è arrosto	
7	Se sono colpevole allora devo essere punito <u>Non sono colpevole</u> Allora non devo essere punito	
8	Vinci solo se giochi <u>Giochi</u> Quindi vinci	
9	Se Marco beve vino, allora si ubriaca <u>Marco non beve vino</u> Marco non si ubriaca	
10	Se la benzina finisce allora la macchina si ferma <u>La benzina finisce</u> Allora la macchina si ferma	
11	Tutte le balene sono mammiferi <u>Moby Dick è una balena</u> Moby Dick è un mammifero	

Osserviamo che la richiesta è che si esprima un parere in modo intuitivo, non si è parlato di regole di inferenza, si è solo discusso, a conclusione delle prime attività, del fatto che una dimostrazione è un fatto linguistico e consta di premesse e conclusioni. Lo scopo del test è quello di aiutare gli studenti a scoprire e sperimentare il senso delle cose che seguono, scoprire e acquisire conoscenza di sé in rapporto ad esse.
Dopo il test si riprende il discorso sul modo di procedere degli scienziati, si introduce il problema posto dalla nascita delle geometrie non euclidee, partendo però dall'analisi della geometria sferica, chiedendo loro di far finta di essere i capitani di una nave e

immaginando, a questo punto, il problema di rotte, distanze, rette e parallelismo. Quindi si pone il problema della negazione del V Postulato di Euclide, che porta al caso di infinite rette parallele. Far riflettere su questa questione, fa andare in crisi lo "stretto" legame che gli assiomi hanno con la realtà, fa passare da una geometria a più geometrie, all'idea che in matematica i risultati non solo si "accumulino" ma nascano anche per "rivoluzione".
Dopo aver intuito che non solo i numeri naturali sono "infiniti", ma, sono tali anche tutti i possibili triangoli del piano euclideo e quindi eventuali proprietà vanno dimostrate, si può porre l'accento sullo stretto legame tra gli assiomi di Euclide e, ad esempio, il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°. Si può fare in modo che gli studenti percepiscano il carattere "relazionale" della dimostrazione e della verità. Questo discorso fa si che sia possibile chiedere ai ragazzi di riflettere
-sul ruolo degli assiomi,
-sul fatto che loro verità è solo "supposta".
Questo fa si che alle teorie così fatte si chieda che siano *coerenti*, cioè dagli assiomi non sia possibile dedurre una proposizione e anche la sua negata.
Un esempio utile a capire la richiesta di "coerenza" e su cui si innestano discorsi importanti di legalità e democrazia è "Il paradosso del Comma 22" contenuto nel libro *Comma 22*, di cui c'è anche una versione cinematografica, relativo al regolamento cui erano soggetti dei piloti e che conteneva due articoli contraddittori:
– Articolo 12, Comma 1
L'unico motivo valido per chiedere il congedo dal fronte è la pazzia.
– Articolo 12, Comma 22
Chiunque chieda il congedo dal fronte non è pazzo.

- *Linguaggio naturale e linguaggio matematico: conoscenza disciplinare*

a. Avete 4 carte le quali hanno un numero stampato su di una faccia, ed una lettera stampata sull'altra faccia. Le 4 carte sono disposte sul tavolo in questo modo:



C'è una regola secondo la quale le carte dovrebbero essere state stampate, e più precisamente

se una carta ha stampata una vocale su un lato, allora deve esserci stampato sull'altro lato un numero pari.

Quali carte dovete girare per controllare che la regola sia stata rispettata?

b. Dopo aver superato tutte le prove per giungere alla valle dell'Eden ci troviamo di fronte a 20 porte numerate con numeri compresi tra 1 e 20; Un cartello ci avvisa che possiamo raggiungere la meta solo se apriamo una porta il cui numero d'ordine **n** rispetta questa regola:

"se n è pari allora n + 1 è un numero primo".

Se apriamo una porta sulla quale vi è un numero che non rispetta tale regola saremo risucchiati in un vortice che ci porterà diritto nelle fauci di un drago. Siamo molto spaventati, quante e quali porte possiamo sicuramente aprire per vincere l'ultima sfida?

Questa attività, i cui risultati sono ben noti dal momento che riguarda il test di Wason, serve per aiutare gli studenti a riflettere sull'aiuto che conoscenze di tipo disciplinare possono dare. Conoscenze però non di tipo superficiale, ma consapevoli.
A tale scopo, relativamente ad altre situazioni nelle quali possono essere messi in evidenza usi pragmatici della lingua che differiscono dagli usi matematici e possono con questi confliggere, si presenta il seguente esercizio.

Collega con un tratto di penna ciascuna frase di sinistra con la frase o le frasi di destra che hanno significato equivalente:

a) Non tutti gli operai della fabbrica sono italiani	**a') Tutti gli operai della fabbrica sono stranieri**
b) Nessun operaio della fabbrica è italiano	**b') Alcuni operai della fabbrica sono italiani**
c) Non tutti gli operai della fabbrica non sono italiani	**c') Tutti gli operai della fabbrica sono italiani**
	d') Alcuni operai della fabbrica sono stranieri

-*La sintassi non è la schiava della semantica*

“Gianni moto incidente ferito guarigione ma prossima”

E’ ben chiaro cosa voglia dire, sono altrettanto chiari gli esempi che seguono?

“Il massacro dei cacciatori fu spaventoso”
“Ogni marinaio ama una ragazza bruna”
“La vecchia porta la sbarra”

PRESE DOVE MISE MISE MISE MISE MISERO MISERO MISE MISERO PRESE PRESE TRE

Dare un significato alla frase, aggiungendo unicamente i segni di interpunzione.

Questa attività mette in evidenza il fatto che c’è l’abitudine di dare un nome agli oggetti, reali, ma qual è il nome di una parola o di una frase? Dal momento che in un testo non può esserci l’oggetto di cui si parla, ma solo un nome per esso, allora anche quando l’oggetto è una frase o una parola, abbiamo bisogno di un nome, in questo caso il nome si ottiene mettendo la parola o la frase tra virgolette o come si vede anche sui testi di, ad esempio grammatica italiana, in corsivo.

- *Verso le regole logiche*

Si vuole ora cominciare a separare la semantica dalla sintassi, ad avvicinarsi al concetto di regola di inferenza, incominciare a dare una idea di *forma* di una inferenza. Per fare ciò si introduce un gioco famoso che consente anche di vedere la differenza tra *stare dentro*, computer, e *stare fuori*, osservatore esterno, deducibilità e decidibilità. Stiamo parlando del gioco **MU**, (da D.R. Hofstadter- "Gödel, Esher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante"**)**

Consideriamo:

- l'alfabeto : **A = { M,I,U}**

-la stringa di partenza (assioma) : **MI**

-le regole:

R1) ad una stringa che termina con I si può aggiungere una U alla fine, cioè:

...I ⇒ ...IU

R2) se abbiamo la stringa Mx (dove x indica una stringa qualsiasi dei simboli dati), possiamo includere anche Mxx nella collezione;

Mx ⇒ Mxx

R3) se in una stringa c'è III si può costruire un'altra stringa mettendo U al posto di III;

...III... ⇒ ...U...

R4) se in una stringa c'è UU si può eliminarlo;

...UU... ⇒ ......

Problema : E' possibile costruire la stringa MIUI? E' possibile costruire la stringa MU?

Questo gioco incuriosisce molto i ragazzi e li porta, guidati, a usare la rappresentazione ad albero esibendo in questo modo non solo una enumerazione dei "teoremi", ma anche la loro dimostrazione.

- *Verso l'idea di forma*

- 3 è pari o è primo
- 3 non è primo

- **3 è pari**

- Stasera vado al cinema o in pizzeria
- Non vado al cinema

- **Vado in pizzeria**

- Mario andrà alla festa oppure Sara andrà alla festa
- Mario non andrà alla festa

- **Sara andrà alla festa**

- Tutti i pesci sono mammiferi
- Moby Dick è un pesce

- **Moby Dick è un mammifero**

- Ogni uomo è mortale
- Socrate è un uomo

- **Socrate è mortale**

- Ogni falipo è reloso
- Alice è falipo

Alice è reloso

Si osserva, attraverso gli esempi, che c'è una struttura sottostante, la prima legata alle parole *oppure* e *non*, la seconda al quantificatore universale *ogni*. A parole siffatte si darà il nome di *parole logiche*, e si va alla ricerca di altre parole logiche. Si scopre che *normalmente* non è una parola logica. Cosa si deve intendere per "oppure" e con quanti significati diversi incontriamo la parola "oppure" nel linguaggio naturale? Quando è vera "*p* oppure *q*"? Cosa vuol dire connettivo vero-funzionale? A questo punto è possibile fare un percorso interno alla matematica e chiedersi: "**Quante sono le funzioni da $\{V,F\} \times \{V,F\} \to \{V,F\}$?**"

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Quale funzione corrisponde alla “o” inclusiva, alla “o” esclusiva e alla “o” incompatibile? Ogni volta che si incontra una “e”, siamo in presenza della parola logica “e”, cioè del connettivo vero-funzionale? E quale funzione corrisponde alla “e” logica?

La parola logica che presenta maggiori problemi, come evidenziato dagli esercizi 7 e 9 del test di ingresso sulla correttezza di alcune inferenze, è quella che corrisponde a “se …allora…”. Ma tale parola è molto importante. La gran parte dei teoremi matematici ha proprio la forma “ se *p* (ipotesi) allora *q* (tesi)” e molte dimostrazioni si fanno *per assurdo*, cioè si suppone che “se *p* allora *q*” sia F, che *p* sia V e che *q* sia F, cioè l’unico caso in cui “se *p* allora *q*” abbia valore F è che *p* sia V e *q* sia F. Questo è quanto accade per “se … allora…”, condizionale materiale, che si adotta nel ragionamento matematico. Ma gli usi del “se…allora…” nel linguaggio naturale sono molto spesso non vero-funzionali e bisogna trovare un modo che renda la scelta del condizionale materiale plausibile. É possibile a tale scopo usare esempi particolari o i diagrammi di Eulero-Venn.

Per meglio comprendere e utilizzare le tavole di verità dei connettivi e la dimostrazione per assurdo si propongono le seguenti attività

Cavalieri e furfanti (di R. Smullyan)

Cavalieri e furfanti sono i soli abitanti di un'isola. I cavalieri dicono sempre la verità mentre i furfanti mentono sempre.

Un naufrago vede avvicinarsi un abitante dell'isola, dall'aspetto può essere sia un cavaliere che un furfante. Allora senza pensarci gli chiede: "Chi sei tu, un cavaliere o un furfante?". Cosa risponde l'abitante dell'isola?

1. Passeggiando sull'isola incontrate tre dei suoi abitanti, Anna, Bruno e Carlo. Volendo sapere qual è la strada per la capitale, è per voi importante sapere se parlate a furfanti o a cavalieri.

Domandate allora ad Anna: " Bruno e Carlo sono entrambi cavalieri?"
Anna: " Si"
Domandate quindi ad Anna: " Bruno è un cavaliere?"
Anna: "No"
Siete in grado di riconoscere il tipo di Anna, Bruno e Carlo?

Conoscendo il tipo degli abitanti incontrati non è a questo punto difficile scoprire la strada per la capitale.

2. Arrivati nella capitale vorreste sapere dov'è il Museo Nazionale. Avendo incontrato altri tre abitanti, Diana, Emma e Fulvia, vi interessa dunque scoprire se parlate a furfanti o a cavalieri.

Domandate allora a Fulvia: "Diana e Emma sono entrambe cavalieri?"
Fulvia: "No"
Le domandate: "Diana è un cavaliere?"
Fulvia: "Si"
Siete in grado di riconoscere il tipo dei tre abitanti?

Potete a questo punto scoprire facilmente dove si trova il Museo Nazionale.

3. Usciti dal museo, entrate in un bar e, mentre ordinate un caffè, un abitante dispettoso vi sottrae la chiave della macchina e la nasconde in uno dei tre cassetti del tavolino denominati "*a*", "*b*", "*c*". Si rifiuta di restituirvela se non indovinate in quale è. Vi permette però di fargli tutte le domande che volete. Tanto non sapete , pensa lui, se è un cavaliere o un furfante.

Gli domandate: " E' vero che la chiave è nel cassetto *a* oppure nel cassetto *b*?"
L'abitante: "No"
Voi: "E' nel cassetto *a*?"
L'abitante: "Si"

Riuscite a scoprire di che tipo è l'abitante e in quale cassetto si trova la chiave?

4. Rientrati in albergo non ricordate più esattamente il numero della vostra camera ma anche il portiere è un abitante dell'isola.

Gli domandate: "E' vero che il numero della camera è il 33 o il 35?"
Portiere: "Si"
Voi: "E' vero che è il 33?"
Portiere: "No"

Riuscite a capire se il portiere è un cavaliere o un furfante e qual è il numero della vostra camera?

5. Uscendo la mattina successiva dall'albergo per andare alla stazione e trovandovi davanti ad un trivio, vorreste sapere quale via dovete prendere. In prossimità del trivio si trovano due abitanti, Aldo e sua sorella Gaia.

Aldo: “ Io e mia sorella siamo dello stesso tipo”

Riuscite a scoprire il tipo di almeno uno dei due?

6. Vorreste conoscere il Presidente dell’isola e sua moglie. Fermate due passanti, Andrea e Bianca, per sapere dove si trova il Palazzo Presidenziale.
Chiedete ad Andrea: “ Se tu sei un furfante lo è anche Bianca?”
Andrea: “No”

Siete in grado di scoprire che cosa sono Andrea e Bianca?

7. arrivati dal Presidente e la moglie, vi chiedete se siano furfanti o cavalieri.
Domandate al Presidente: “ Se tu sei un cavaliere lo è anche tua moglie?”
Presidente: “ Si”

Siete in grado di identificare il Presidente e sua moglie?

Ed ora .... riuscirai a sposare Porzia?

Risolvi il seguente problema evidenziando la strategia seguita:
(da: "*Qual è il titolo di questo libro?*" di R. Smullyan ed Zanichelli)

In "Il Mercante di Venezia" di Shakespeare, Porzia aveva tre scrigni, uno d'oro, uno d'argento e uno di piombo, e in uno c'era il suo ritratto. Il pretendente di Porzia doveva scegliere uno scrigno, e se fosse stato tanto fortunato (o tanto saggio) da scegliere quello col ritratto, avrebbe avuto diritto alla mano di Porzia. Sul coperchio di ogni scrigno c'era un'iscrizione che aveva lo scopo di aiutare il pretendente a scegliere correttamente.

Porzia spiegò al pretendente che di queste affermazioni, al massimo una era vera. Quale scrigno avrebbe dovuto scegliere il pretendente?

E .... riuscirai a non divorziare?

Risolvi il seguente problema evidenziando la strategia seguita:

Porzia, dopo un certo tempo, volle ancora verificare l'intelligenza del marito e lo sottopose ad una nuova prova, pena il divorzio se non fosse stato trovato il suo ritratto.

Porzia affermò che tutte le iscrizioni erano vere.

I quesiti di Susy

Gianni dice:"Susy questi tre ragazzini avevano quattro palline: una bianca, una rossa, una verde ed una nera.

1)Nella prima scatola non c'è la rossa e nella terza non c'è la nera.

2)Nella prima scatola c'è la rossa e nella quarta non c'è la verde.

3)Nella prima c'è la verde e nella quarta c'è la nera.

Ognuna di queste affermazioni contiene una verità ed una bugia, ora cerca di scoprire di quale colore è la pallina nella prima scatola e quella nella terza.

Tre zucchetti

Catturati da ribelli, tre geologi vengono trascinati davanti al capo della banda, che ordina di decapitarli. Ma all'ultimo momento ha un ripensamento e mostra ai condannati 5 zucchetti, cioè le papaline ricamate tipiche delle tribù ribelli, di cui **3 rossi e 2 verdi** : ordina poi ai tre prigionieri di allinearsi con la faccia al muro e pone loro sul capo i tre zucchetti rossi.

"Adesso" dice " voltatevi e guardatevi in faccia fra voi: chi riuscirà a stabilire con un ragionamento logico il colore dello zucchetto che ha in testa avrà salva la vita".

I tre si voltano, si guardano a vicenda, pensano a lungo, poi uno di essi dice:" Non lo so" e viene abbattuto all'istante con un colpo di pistola.

Dopo un breve intervallo di silenzio, il secondo condannato dice:" Non lo so" e porge la tempia alla pistola che lo fulmina.

Quasi immediatamente, il terzo prigioniero s'illumina di gioia e dice:" Il mio zucchetto è rosso".

Dando fiducia alle dichiarazioni dei suoi sventurati compagni, il terzo geologo con un ragionamento logico è giunto alla conclusione esatta. In che modo?

Si può a questo punto introdurre, se è necessario, un linguaggio formale dove ¬ sta per "non", ∧ sta per "e", ∨ sta per "o" inclusiva, → sta per il "condizionale materiale", ↔ per il "bicondizionale", e si scopre come le altre funzioni possano essere espresse mediante questi.
Consideriamo poi il classico esempio :

Se la benzina finisce allora la macchina si ferma
<u>La benzina finisce</u> *Corretto*
Allora la macchina si ferma

Se la benzina finisce allora la macchina si ferma
<u>La benzina non finisce</u> *Non Corretto*
Allora la macchina non si ferma

Se la benzina finisce allora la macchina si ferma
<u>La macchina si ferma</u> *Non Corretto*
Allora la benzina è finita

Se la benzina finisce allora la macchina si ferma
<u>La macchina non si ferma</u> *Corretto*
Allora la benzina non è finita

Le forme corrispondenti sono:

$$\frac{\begin{array}{l}\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \\ \mathbf{p}\end{array}}{\mathbf{q}}$$

Modus Ponens, la verità si trasmette verso il basso

$$\frac{\begin{array}{l}\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \\ \neg \mathbf{q}\end{array}}{\neg \mathbf{p}}$$

Modus Tollens, trasmette la falsità verso l'alto.