Laboratorio di Analisi infinitesimale
Docenti: Proff.sse Loredana Biacino e Ester GIarrusso.

Il laboratorio ha seguito il seguente svolgimento.

Primo incontro - E' stato inizialmente dato ai ragazzi un questionario di presentazione, ove intervenivano varie questioni di cui gli studenti dovevano essere già a conoscenza e che è stato la base di una discussione successiva.

Ecco il questionario:

Questionario d'ingresso 2017.

1 – Dopo aver introdotto un riferimento cartesiano sulla retta,

a) disporvi i punti che hanno le seguenti ascisse: 1,72; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5/12; 3/16; 6/4; $\frac{\sqrt{3}}{4}$; $3/4$;

b) risolvere le disequazioni: x|- x|>0; $\frac{1}{x}$ >1;

c) dire se sono vere o false le seguenti eguaglianze: $\frac{1}{a+1} = 1+\frac{1}{a}$; $\frac{a+1}{a} = 1+\frac{1}{a}$.

2 – Dopo aver introdotto un riferimento cartesiano nel piano, spiegare perché l'equazione 3x-y=0 rappresenta una retta. Chi è e cosa rappresenta il suo coefficiente angolare (o pendenza) ? Qual è il coefficiente angolare della retta y=6?

3 – Sapresti dare la definizione di intervallo di numeri reali?

4 - Disegna le parabole di equazione y=$\frac{1}{2}x^2$; y=x^2; y=2x^2; y=4x^2. Cosa noti?
Qual è la pendenza delle rette secanti passanti per l'origine e per il punto di ascissa 1 (e ordinata rispettivamente ½,1,2,4)?

5 – Data la parabola di equazione y=x^2, scrivere l'equazione:

a) della traslata che ha vertice in (0,3);
b) della traslata che ha vertice in (3,2);
c) della traslata che ha vertice in (4,0)
d) delle rette secanti che passano per l'origine e per il punto (2,4), per l'origine e il punto (1,1), per l'origine e il punto (1/2, ¼), per l'origine e il punto (1/10, 1/100), ... Cosa noti relativamente alla loro pendenza?

6- Data una circonferenza C e un punto P su di essa, cosa intendiamo dire quando diciamo che le retta d è tangente a C in P? Vi sembrano soddisfacenti le seguenti definizioni? Motivare la risposta.

a) La retta incontra il cerchio in un solo punto.
b) Il cerchio giace da una sola parte della retta.
c) La tangente è perpendicolare alla retta che congiunge il punto di contatto P con il centro del cerchio.

Dopo che i ragazzi hanno risposto ai vari quesiti, si è aperta una discussione con la partecipazione di tutti: si é discusso della rappresentazione cartesiana delle funzioni, della pendenza dei grafici cartesiani in un punto, della definizione geometrica di tangente.
Dopo tale discussione noi insegnanti abbiamo dato le definizioni di funzione crescente o decrescente, di massimo e minimo assoluti o relativi, osservando con esempi in che relazione la tangente, supposta esistente, si trovasse con il grafico della funzione. Si é discusso con i ragazzi

dell'argomento e si sono presi in considerazione vari casi particolari. Si è infine accennato al metodo di Fermat per la ricerca dei massimi e dei minimi.

In generale, con l'ausilio della geometria analitica, possiamo effettuare uno studio accurato di molte curve e ricavare dall'equazione che le definisce un gran numero di proprietà. Questo è particolarmente vero per curve che si presentino come grafici di funzioni, per le quali si possono studiare massimi o minimi utilizzando in genere il calcolo differenziale.
Fermat osservò, in un suo lavoro sulla ricerca dei massimi e dei minimi, che se una funzione in un punto x, interno ad un intervallo dove è definita, ha un massimo o un minimo allora, considerato un punto vicino a x, sia x+E, il valore della funzione in x+E differisce di molto poco dal valore in x, in modo tale che non solo si può confondere con 0 la differenza f(x+E)-f(x) ma anche il rapporto $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$. Quindi Fermat pensò che per determinare i massimi e i minimi si dovesse seguire la seguente procedura:

Costruire il rapporto $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$;
eseguire le semplificazioni possibili in modo da eliminare la E dal denominatore;
porre E eguale a zero nell'espressione semplificata;
eguagliare a zero l'espressione così ottenuta in modo da determinare il valore (o i valori) della x.
I valori corrispondenti f(x) avrebbero fornito i minimi o i massimi della funzione.

Secondo incontro - Agli studenti è stata data una scheda da leggere e su cui lavorare:
Essa era la seguente.

Scheda di verifica PLS

1) Quali informazioni fornisce il segno del coefficiente angolare? Ad es. qual è l'andamento delle due rette di equazione y=2x-3 e y=5-3x? Sapresti giustificare la risposta?
2) Disegnare il grafico di f(x)=|x|.

3) La velocità media di un oggetto in moto è data dal rapporto tra lo spazio percorso e la lunghezza dell'intervallo di tempo in cui tale spazio è stato percorso.

4) Se un sasso è lasciato cadere da fermo vicino alla superficie della terra, in un intervallo iniziale di t secondi esso percorre (in verticale) lo spazio y=f(t)=4,9 t^2 metri.
a) qual è la velocità media nei primi 3 secondi?
b)qual è la velocità media nell'intervallo di tempo, in secondi, [1,2]?

5) La velocità istantanea in un istante t_o è il valore cui tende la velocità media in un intervallo contenente t_o quando tale intervallo diventa sempre più piccolo.
b) Calcolare la velocità istantanea negli istanti t= 1 e t=2 facendo riferimento alle seguenti tabelle relative rispettivamente agli intervalli [1, 1+*h*] e [2, 2+*h*]:

h	Δy/Δt
1	14,7000
0,1	10,2900
0,01	9,8490
0,001	9,8049
0,0001	9,8005

h	$\Delta y/\Delta t$
1	24,5000
0,1	20,0900
0,01	19,6490
0,001	19,6049
0,0001	19,6005

b) Calcolare la velocità istantanea all'istante generico t.

6) Risolvere il seguente problema (Maturità 2006):
Un filo metallico di lunghezza A viene utilizzato per recintare un'aiuola rettangolare.
a) Qual è l'aiuola di area massima che è possibile recintare?
Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare.
Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:
b) la somma delle aree sia minima?
c) la somma delle aree sia massima?
Un'aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10 % ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Dopo che i ragazzi hanno tentato di rispondere alle domande, si è aperta la discussione, con considerazioni di carattere ingenuo sulla definizione di limite, di tangente e di velocità.
Noi insegnanti abbiamo nuovamente introdotto il metodo di Fermat per la ricerca dei minimi e dei massimi. Si sono fatte delle osservazioni di carattere storico, cercando di collegare l'opera di Fermat e di Cartesio all'ambito culturale di provenienza.
Ecco le cose che sostanzialmente si sono dette:

Il Seicento fu un secolo di grandi scoperte e innovazioni nell'ambito delle Scienze in generale e della matematica in particolare. A Parigi, nella prima metà del secolo si assistette ad un fermento culturale davvero eccezionale, che non trova riscontro in nessun altro periodo storico, se non forse nel secolo d'oro di Atene (V secolo a.C.). Un grande numero di matematici vennero in contatto tra loro, e si raccolsero attorno alla figura del padre minimo Martin Mersenne o si mantennero costantemente in rapporto epistolare con lui: e tale entusiasmo non riguardava solo la matematica: infatti contemporaneamente sorgevano accademie e circoli in cui si discuteva di scienza, lettere e in generale di cultura. In tali ambiti si andava affermando un nuovo tipo di sapere che si discostava apertamente dal sapere precostituito, essenzialmente la scolastica. L'esplosione di tale fenomeno non è casuale, ma si collega alle grandi innovazioni e novità che avevano segnato il secolo precedente.
La più importante è la scoperta dell'America, avvenuta nel 1492. Da allora si erano avvicendate spedizioni in quelle terre remote e avevano preso a circolare i racconti di piante e animali fantastici e strani e poi di popolazioni fino ad allora sconosciute. Un grande flusso d'oro aveva cominciato a scorrere in Portogallo, proveniente da quei paesi lontani!
Nel 1543 era stato stampato il *De revolutionibus orbium coelestium* di Nicolò Copernico, con il quale l'autore spiegava i fenomeni celesti ponendo al centro del sistema solare il sole invece che la terra, mettendo in crisi l'autorità della Chiesa Cattolica che da più di mille anni aveva accolto e fatta propria la teoria di Aristotele, perfezionata scientificamente da Tolomeo, secondo la quale la terra è al centro dell'universo. Si può immaginare l'impatto che una simile teoria poteva avere sulla cultura

di allora: l'uomo improvvisamente non era più il centro della creazione, ma veniva quasi respinto in una posizione marginale: per questo la Chiesa avrebbe avversato le nuove teorie nei secoli futuri.
Il lavoro di Copernico non rimase isolato, ma ebbe dei seguaci di grande ingegno: basti ricordare Tycho Brahe (1546-1601) e Giovanni Keplero (1571-1630): quest'ultimo osservò che a descrivere le orbite dei pianeti attorno al sole ben si prestavano le ellissi, curve studiate sin dall'antichità e che ora all'improvviso acquistavano una grande importanza. A questi nomi bisogna aggiungere Galileo Galilei (1564-1642) e in seguito Isacco Newton ((1642-1727) che avrebbe gettato le basi del calcolo differenziale e della meccanica moderna.
Un altro duro colpo per la cultura cattolica fu poi inferto da Martin Lutero, che nel 1520, bruciando la bolla papale diede inizio alla riforma protestante. A questo non tardò a rispondere la Chiesa con il Concilio di Trento (1545-1563) e con l'istituzione dell'Inquisizione.
Infine è da ricordare che nel 1571, con la battaglia di Lepanto il pericolo turco fu per il momento scongiurato : l'Europa poteva tirare un sospiro di sollievo e dedicarsi ai dissidi intestini.
Dal punto di vista politico ricordiamo che dal 1616 al 1643 con il regno di Luigi XIII, la Francia , grazie al Cardinale Richelieu, ristabilisce l'autorità sovrana e tende ad occupare una posizione egemone in Europa. Tale scopo è completamente raggiunto dopo la vittoria sugli Asburgo nella guerra dei Trent'anni (iniziata nel 1635).
Il nuovo tipo di cultura e di sapere che si manifesta come abbiamo detto in questo periodo spesso si scontra apertamente contro l'autorità politica: un atto che bene svela la natura di quest'ultima è l'ingiunzione del Parlamento francese a non attaccare Aristotele e i classici , pena la vita, con cui si rispose, nel 1624 ad alcuni filosofi che avevano deciso di discutere pubblicamente 14 tesi contro Aristotele.

Queste osservazioni sul declino della scolastica e della logica classica avevano lo scopo di rendersi conto che non è casuale l'affermarsi del metodo di Fermat in cui una quantità matematica è prima supposta diversa da zero e in un secondo momento posta eguale a zero. In effetti anche oggi è unanimemente usato il principio di non contraddizione: non adeguarvisi, ai tempi di Fermat aveva il significato di cercare nuove strade; ed in effetti quell'errore iniziale, che sarebbe stato successivamente giustificato (circa due secoli dopo) con l'introduzione del concetto di limite, avrebbe portato un enorme sviluppo nel campo della scienza.
Dopo questa discussione sono stati posti vari problemi agli studenti.

Problema 1. Consideriamo la funzione $y=3+2x-x^2$. Vogliamo determinarne il massimo.
Seguiamo le indicazioni di Fermat:
poniamo

$$\frac{3+2(x+E)-(x+E)^2-3-2x+x^2}{E}=0.$$

Effettuate le semplificazioni si ottiene: 2-E-2x=0; posto E=0 si deduce x=1. SI ottiene in tal modo l'ascissa del vertice della parabola; il corrispondente valore è un massimo assoluto, dato da f(1)= 4.

Problema 2 . E' dato un segmento AB di lunghezza a. Determinare su di esso un punto C in modo che il rettangolo di lati AC e CB abbia area massima.
Posto AC=x la funzione da massimizzare è la seguente A(x)=x(a-x). Seguendo le indicazioni di Fermat consideriamo la seguente equazione:

$$\frac{(x+E)(a-x-E)-x(a-x)}{E}=0.$$

Eseguiamo i calcoli e semplifichiamo; otteniamo: a-2x-E=0.

Ponendo infine E=0 si ricava $x=\frac{a}{2}$, che è il richiesto punto di massimo; si osservi che per x=0 e x=a si ha il minimo per l'area, che è zero. Non otteniamo tali valori perché sono estremi dell'intervallo [0,a] dove varia la x.
Il quadrato quindi ha la massima area tra tutti i rettangoli di dato perimetro. Questo rientra in un risultato più generale: tra tutti i poligoni aventi un dato numero di lati e di dato perimetro, il

poligono regolare è quello avente area massima. Se poi consideriamo tutti i poligoni regolari di dato perimetro e li confrontiamo con il cerchio che ha lo stesso perimetro sarà il cerchio ad avere area massima: tale proprietà del cerchio è detta proprietà isoperimetrica.

Problema 3 . E' dato un foglio quadrato di lato a. Vogliamo formarne una scatola il cui volume sia massimo.
Detta x l'altezza della scatola a forma di prisma retto rettangolo la funzione da massimizzare è la seguente: $V(x)= (a-2x)^2x$. Seguendo la precedente procedura otteniamo:

$$\frac{[a-2(x+E)]^2(x+E)-(a-2x)^2x}{E}=0;$$

eseguiamo i calcoli:

$$\frac{(a-2x)^2(x+E)+[4E^2-4E(a-2x)](x+E)-(a-2x)^2x}{E}=0;$$

dividendo per E si ricava:
$(a-2x)^2 +4Ex +4E^2-4E(a-2x)-4x(a-2x)=0$;
ponendo E=0 la precedente equazione diventa:
$(a-2x)(a-6x)=0$.
L'ultima equazione ha due soluzioni, $x=\frac{a}{2}$ e $x=\frac{a}{6}$.
La prima di tali soluzioni corrisponde evidentemente ad un minimo mentre la seconda è la soluzione richiesta. Il corrispondente massimo è dato da $V(\frac{a}{6}) = \frac{2a^3}{27}$.

Si è poi detto agli studenti che una delle prove della bontà del metodo illustrato (basata sul principio che la luce percorre cammini che minimizzano il tempo) consisteva nel fatto che esso permetteva di dimostrare per la prima volta in modo rigoroso la legge di rifrazione della luce nel passaggio attraverso due mezzi omogenei di diversa densità. Tale legge era stata stabilita per via sperimentale dal matematico olandese Willebrord Snell (Leida 1580-1626). Cartesio formulò la legge correttamente nella Diottrica, dandone però una dimostrazione insoddisfacente.
Abbiamo osservato che lo stesso principio permette di dimostrare la legge di riflessione della luce, già nota sin dall'antichità, di cui si è discussa la dimostrazione geometrica.

Problema 4 - Supponiamo che un raggio di luce debba passare da A a B, uno nel primo mezzo, l'altro nel secondo, e che i due mezzi, schematizzati nel piano siano separati da una retta su cui indichiamo con A' la proiezione ortogonale di A e con B' la proiezione ortogonale di B: trovare in quale punto C il raggio di luce deve attraversare il segmento A'B' affinché il tempo impiegato sia minimo.
Risoluzione - Poniamo A'B'=c, A'C=x. Quindi, dette a e b le lunghezze dei segmenti AA' e BB' rispettivamente, risulta: $AC=\sqrt{x^2+a^2}$; $CB=\sqrt{(c-x)^2+b^2}$.
Dette u e v le velocità nei due mezzi, il tempo per passare da A a B è dato da

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{u}+\frac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v}.$$

Per minimizzare tale tempo Fermat usa un metodo lievemente diverso da quello precedentemente illustrato. Considera due punti x_1 e x_2 prossimi al punto x in cui il tempo è minimo, con $x_1<x<x_2$ e osserva che, se tali punti sono opportunamente scelti, in essi deve risultare $T(x_1)=T(x_2)$. Sostituendo ed effettuando qualche semplice calcolo si ottiene:

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{u(\sqrt{x_1^2+a^2}+\sqrt{x_2^2+a^2}}+\frac{(c-x_1)^2-(c-x_2)^2}{v(\sqrt{(c-x_1)^2+b^2}+\sqrt{(c-x_2)^2+b^2})}=0;$$

dividiamo per x_1-x_2 e otteniamo:

$$\frac{x_1+x_2}{u(\sqrt{x_1^2+a^2}+\sqrt{x_2^2+a^2}}+\frac{2c-x_1-x_2}{v(\sqrt{(c-x_1)^2+b^2}+\sqrt{(c-x_2)^2+b^2})}=0.$$

Poniamo ora x_1=x_2=x : allora si deduce dalla precedente relazione:

$$\frac{x}{u\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{c-x}{v\sqrt{(c-x)^2+b^2}}.$$

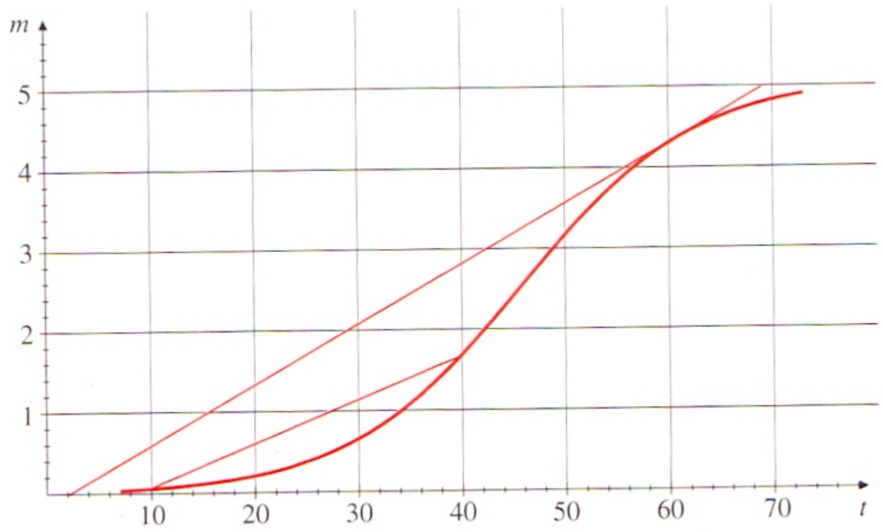
Da qui si trae:

$$\frac{\text{sen } i}{u} = \frac{\text{sen } r}{v},$$

avendo indicato con i ed r rispettivamente l'angolo d'incidenza e l'angolo di rifrazione.

Terzo incontro – Anche questa volta è stato proposto un questionario, che aveva lo scopo di mettere a fuoco il collegamento tra le nozioni di velocità e tangente in un punto ad un grafico.

Crescita di una coltura di alghe.



In un esperimento da laboratorio è stata studiata la biomassa di una coltura di alghe per un periodo di 74 giorni, misurando l'area m occupata dalla coltura sul vetrino del microscopio. Sono stati registrati i valori di m (in millimetri quadrati) in funzione del tempo t (in giorni) e i punti determinati sono stati uniti da una curva di equazione m=f(t) che ha l'andamento in figura. La biomassa era circa 0,1 nel giorno 10 ed era cresciuta a circa 1,7 nel giorno 40.

Quale incremento ha subito la biomassa in tale periodo?

Qual è stata la rapidità di crescita media nell'intervallo di tempo fra il giorno 10 e il giorno 40? Che relazione c'è tra tale velocità media e la retta (secante) che unisce i punti del grafico di m=f(t) corrispondenti a t=10 e t=40?

Consideriamo ora intervalli di tempo sempre più corti vicino al punto t=60. I segmenti delle rette secanti diventano sempre più corti e la loro pendenza tende a un limite che è la pendenza della retta tangente nel punto di ascissa t=60. Tale retta sembra passare per i punti (2,0) e (60,4.3).

Qual è il suo coefficiente angolare?

Qual è la velocità di crescita della biomassa al 60-simo giorno?

Dopo la discussione sul questionario é stato esposto il metodo delle tangenti utilizzato da Fermat e i ragazzi sono stati invitati a risolvere vari problemi in cui bisognava determinare la tangente ad una curva.

Fermat propose il suo metodo che sebbene limitato a particolari funzioni (sostanzialmente le funzioni razionali) era però di facile applicazione. Vediamo come procede: data la curva di equazione y=f(x) ed il punto P=(x,f(x)) egli suppone già data la tangente in P: sia T il punto in cui tale tangente interseca l'asse x e sia Q il punto (x,0). Fermat chiama sottotangente il segmento TQ ed il suo scopo è quello di determinarlo. Per questo egli ragiona al seguente modo: fissato al solito un valore piccolo E, considera il punto R=(x+E,0) e il punto S che ha ascissa x+E sulla tangente . Vale l'eguaglianza: SR:PQ=TR:TQ. Poniamo TQ=c, quindi TR= c+E. Se E è molto piccolo si può pensare che S giaccia sulla curva di equazione y=f(x) e quindi si può stabilire l'adeguaglianza:

$$f(x+E):f(x)\cong(c+E):c;$$

sottraendo si ottiene $(f(x+E)-f(x)):f(x)\cong E:c$,
da cui:

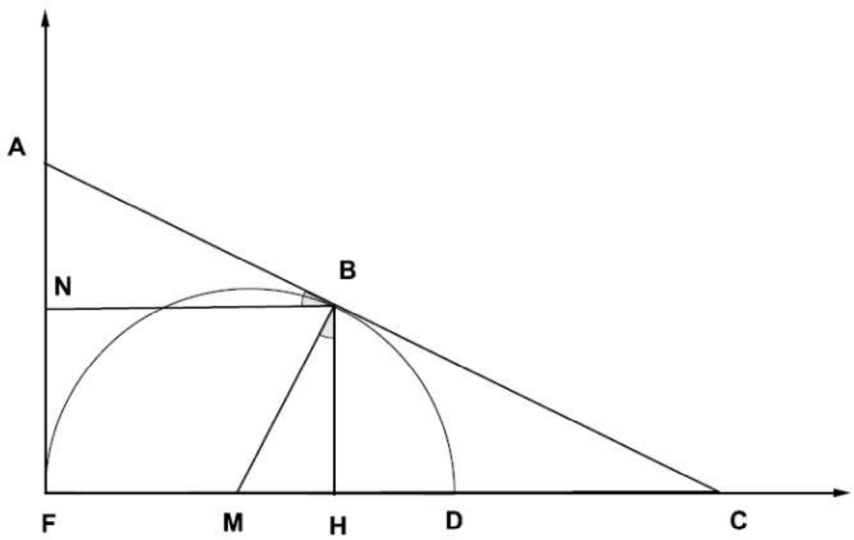
$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E}\cong\frac{f(x)}{c}.$$

Da tale relazione, semplificando al solito modo la E e ponendo poi infine E=0 si ottiene la c.

Osservazione 1 – Mentre nel metodo dei max e min la x è una incognita, che il metodo si propone di determinare, nel metodo delle tangenti la x è fissata e l'incognita è la sottotangente c.
Osservazione 2 - Il primo membro della precedente adeguaglianza rappresenta il coefficiente angolare della secante al grafico passante per il punto fisso P=(x,f(x)) e per il punto variabile (x+E,f(x+E)). Se si utilizza la procedura del metodo dei max e min, cioè si semplifica prima per E in modo che non compaia più a denominatore e poi si pone E=0, si ottiene (per le solite considerazioni) il coefficiente angolare della retta tangente in P.

Problema 1 - Determinare l'equazione della tangente al grafico di equazione $f(x)= x^2+4x +2$ nel punto a P=(0,2).
In tal caso $f(0+E)=E^2+4E+2$; $\frac{f(0+E)-f(0)}{E}\cong\frac{f(0)}{c}$ diventa $\frac{E^2+4E}{E}\cong\frac{2}{c}$ da cui semplificando e ponendo infine E=0 si ottiene c=1/2. Ovviamente a questo punto si può risalire all'equazione della tangente, come retta passante per T=(-1/2,0) e P=(0,2): si ottiene l'equazione y=2+4x.
Se si opera direttamente sul primo membro si ottiene con la medesima procedura il coefficiente angolare della tangente, cioè 4.

E' stato anche preso in considerazione il seguente problema posto da Fermat:
Problema 2 - *Si consideri la semicirconferenza FBD di diametro FD; si conduca la perpendicolare BH al diametro FD; si cerca il massimo del prodotto di FH per HB.*

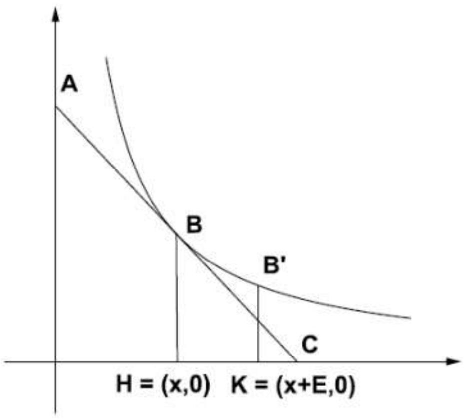


Noi considereremo un sistema di riferimento cartesiano con l'origine in F, asse delle x sul diametro FD e asse y tangente alla semicirconferenza in F.

Dimostrazione sintetica fornita da Fermat.

Fermat osserva che il problema consiste nel determinare, tra tutte le iperboli di equazione xy=k, quella tangente alla data semicirconferenza: ovviamente, detto B il punto di tangenza delle due curve, esse hanno in B la stessa retta tangente. Fermat ricorda che nelle *Coniche* di Apollonio è dimostrato che, detti A e C i punti in cui tale tangente interseca gli asintoti dell'iperbole, rispettivamente l'asse y e l'asse x nel nostro caso, allora B divide a metà il segmento AC.

Dimostrazione della proprietà evidenziata da Apollonio col metodo delle tangenti di Fermat.



Apriamo una breve parentesi osservando che il risultato dovuto ad Apollonio può essere facilmente stabilito con la procedura analitica di Fermat esposta prima. Infatti considerato sulla tangente AC il punto B' di ascissa x+E e sull'asse x il punto K=(x+E,0), dalla similitudine dei triangoli HBC e KB'C, supposto inoltre che B' si trovi sulla curva , si può facilmente stabilire l'adeguaglianza:

$\frac{k}{x} : \frac{k}{x+E} \cong$ c : (c-E).

Applicando a questo punto il sottraendo, si ottiene:

$(\frac{k}{x} - \frac{k}{x+E}) : \frac{k}{x} \cong$ E : c,

dove c è la sottotangente, lunghezza del segmento HC. Effettuando i calcoli e le semplificazioni, ponendo infine E=0, si ottiene come risultato x=c, cioè FH e HC hanno eguale lunghezza. Ne segue, per la similitudine dei triangoli AFC e BHC che anche AB=BC.

Si può ora risolvere il problema di massimo dato per via sintetica come fa Fermat. Sia M il centro della semicirconferenza e sia N il piede della perpendicolare condotta da B sull'asse y. Allora il triangolo MBH è simile al triangolo ANB (in quanto entrambi i triangoli sono rettangoli e i due angoli in B sono eguali in quanto i loro lati sono a due a due perpendicolari). Inoltre l'ipotenusa AB é eguale ad AF, in quanto AB e AF sono le tangenti tracciate alla semicirconferenza dal punto A; pertanto AB è doppia di AN (in quanto il triangolo ABN è simile al triangolo AFC e AC è il doppio di AB per quanto dimostrato in precedenza), quindi anche BM è il doppio di MH. Ma allora FH= FM+MH è eguale ai $\frac{3}{2}$ del raggio della semicirconferenza ed il problema è risolto.

Risoluzione analitica del Problema.

Sia x l'ascissa di B, r il raggio FM, allora l'ordinata BH sarà data da y=$\sqrt{r^2-(x-r)^2}$; la funzione da massimizzare è quindi

f(x)=x$\sqrt{r^2-(x-r)^2}$=x$\sqrt{2rx-x^2}$

Qui è possibile adoperare un metodo che talvolta Fermat usa; si considerano due punti x_1 e x_2 tali che f(x_1)= f(x_2), si elevano al quadrato ambo i membri della precedente relazione, ottenendo:

$x_1^3(2r-x_1) = x_2^3(2r - x_2)$

Da ciò si trae, dopo aver portato quanto scritto a destra dell'eguaglianza a primo membro e aver diviso per $x_1 - x_2$:

$2r(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2) = 0.$

Si pone infine $x_1 = x_2 = x$. e si ottiene in tal modo un'equazione le cui soluzioni sono x=0, estremo dell'intervallo di variabilità della x, corrispondente al minimo della data funzione e $x = \frac{3}{2}r$, che è la soluzione richiesta.
Si noti che nel caso della soluzione analitica il risultato intermedio (la proposizione dovuta ad Apollonio) non interviene. Il procedimento è più meccanico, ma sostanzialmente più semplice.

E' chiaro dal contesto che Fermat predilige il metodo sintetico a quello analitico, ma comprende che mentre il metodo analitico fornisce una procedura meccanica e quindi uniforme che si applica a una vasta classe di problemi, per il metodo sintetico bisogna escogitare una diversa soluzione per ogni tipo di problema; tale metodo richiede pertanto fantasia ed inventiva, qualità ben diverse dalla capacità di apprendere una procedura e applicarla, sempre eguale a se stessa, in tutti i casi che si presentano.
Un confronto del genere può essere utile didatticamente perché mette in luce che mentre un metodo, quello analitico, richiede che vengano affinate le abilità di calcolo in base a date regole (come avviene quando si impara a derivare le funzioni composte tramite le funzioni elementari), il metodo sintetico (che nel caso della derivazione è ovviamente oggi completamente fuori luogo) richiede la partecipazione della mente ad un livello maggiore di libertà e di fantasia.
Infatti c'è una grande differenza tra applicare delle regole e costruire delle regole. Ora a scuola si impara ad applicare le regole ed è già un grande risultato quando ciò avviene. Molto più faticoso è imparare ad inventare regole nuove: questo è lo scopo della risoluzione di facili problemi che escano fuori dagli schemi tradizionali: ci vuole allenamento ad utilizzare ciò che già si conosce in modo nuovo allo scopo di dimostrare una qualche proprietà. Questo esercizio valorizza capacità che possono essere di grande utilità a livello personale e nel contesto sociale: infatti non è ben precisato quello che sarà richiesto ai nostri studenti quando lasceranno la scuola o l'università; in continuazione nuove tecnologie soppiantano quelle vecchie così che il panorama delle abilità da mettere in campo cambia incessantemente: cosa può essere utile per affrontare una tale situazione? Certo l'attitudine ad apprendere è essenziale come lo è l'informazione di base, ma quello che davvero fa la differenza è la capacità di risolvere problemi che si pongono in modo nuovo.

Nel corso dello stesso incontro è anche stato proposto un confronto con il metodo di Cartesio per la determinazione delle tangenti.
Cartesio nella geometria del 1637 espose il suo metodo molto rigoroso per la determinazione delle tangenti, di carattere completamente algebrico e che pertanto non porgeva il fianco alle obiezioni di carattere logico che si possono opporre al metodo di Fermat: tra i due matematici nacque una controversia, in cui ognuno affermava la superiorità del suo metodo. La discussione coinvolse molti matematici dell'epoca che si schierarono alcuni con uno altri con l'altro dei due contendenti. Tra l'altro dalla discussione emerse il famoso problema inverso delle tangenti, così definito da Fermat: "...data la proprietà della tangente determinare la curva che deve convenire a questa proprietà", cioè il problema alla base del calcolo integrale. In conclusione però Cartesio ammise sostanzialmente che il metodo di Fermat era più generale del suo, poteva cioè applicarsi a molte più funzioni con una notevole semplicità, mentre il suo metodo, appena si considerano funzioni più complesse (come semplici polinomi di grado superiore a due) presenta difficoltà di calcolo

insuperabili. Il metodo di Cartesio, per quanto egli lo applicasse in un modo lievemente diverso, sostanzialmente si può usare nei seguenti problemi.

Problema 1 - Determinare la tangente alla parabola di equazione $y=x^2$ nel punto $P=(a, a^2)$.
Risoluzione - Possiamo intersecare la parabola con le rette di un fascio passante per P e imporre che la risultante presenti una radice doppia. Quindi scriviamo l'equazione di una retta passante per P: $y=a^2+m(x-a)$. Sostituendo nell'equazione della parabola si ottiene: $x^2-mx+ma-a^2\equiv 0$. Imponiamo una soluzione doppia: basta ovviamente imporre che sia nullo il discriminante: otteniamo così: $\Delta=(m-2a)^2=0$ se $m=2a$.
Quindi l'equazione della tangente richiesta è $y=a^2+2a(x-a)$.

Problema 2 - Determinare la tangente alla circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$ nel punto $P=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Risoluzione - Si può intersecare la circonferenza con le rette di un fascio passante per P e imporre che la risultante, che è un'equazione di secondo grado, dipendente da un parametro, che è il parametro del fascio di rette, presenti una soluzione doppia: per far questo basta annullare il determinante , il che come si verifica facilmente porta ancora a un'equazione di secondo grado nel parametro.
Il metodo esposto è di semplice enunciazione, ma presenta difficoltà di calcolo sempre più elevate quando si passa a curve più complicate.

Quarto incontro –
Si è parlato di problemi isoperimetrici. Ne sono stati proposti alcuni.

Problema 1 – Una pianura è attraversata da un fiume rettilineo. Due villaggi, A e B, sono situati dalla stessa banda rispetto al fiume. Determinare il cammino più breve che deve compiere un abitante di A per recarsi in B fermandosi strada facendo a prendere acqua al fiume.

Problema 2 – Data una retta e due punti fuori di essa, determinare il cammino di minima lunghezza che ha per estremi A e B e un punto in comune con la retta.

Problema 3 – Verificare che tra tutti i triangoli che hanno una base fissa e area costante (quindi altezza costante) quello isoscele ha il perimetro minimo.

Problema 4-Di tutti i triangoli con la stessa base e perimetro costante, l'isoscele ha area massima.

Problema 5 - Dati due triangoli con la stessa base e lo stesso perimetro, ha area maggiore quello dei due il cui lato maggiore (diverso dalla base) è minore.

Sia per dimostrare 4 che 5 basta considerare l'ellisse che ha come fuochi due punti A e B tali che il segmento AB, di lunghezza a sia eguale alla base fissata dei triangoli, e i suoi punti P siano tali che PA+PB=p-a, essendo p il perimetro assegnato.

Problema 6 - Tra tutti i triangoli che hanno perimetro costante, l'equilatero ha area massima.
Di questa proprietà si possono fornire diverse dimostrazioni, qui ne viene proposta una di carattere analitico che usa il metodo dei minimi e massimi di Fermat.
Dim.- Si consideri un triangolo di dato perimetro 2p, che per quanto visto al punto 4 si può supporre isoscele. Sia $x\epsilon[p/2, p]$ il suo lato obliquo, quindi la sua altezza rispetto alla base è data da $\sqrt{x^2-(p-x)^2} = \sqrt{2px-p^2}$ e conseguentemente l'area è $f(x)=(p-x)\sqrt{2px-p^2}$.
Applicando il metodo di Fermat si ricava:

$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E} = \frac{(p-x-E)\sqrt{2px+2pE-p^2}-(p-x)\sqrt{2px-p^2}}{E}$$

$=\frac{2p(p-x)}{\sqrt{2px+2pE-p^2}+\sqrt{2px-p^2}}$ - $\sqrt{2px+2pE-p^2}$.

Eguagliando tale espressione a 0 e ponendo E=0 si ottiene:
p(p-x)=2px-p^2
da cui segue x=2p/3, cioè il triangolo di perimetro p per cui l'area è massima è il triangolo equilatero: il minimo, eguale a 0, si ottiene per x=p/2 o x=p, valori che non otteniamo dall'applicazione del metodo in quanto estremi dell'intervallo di variabilità della x.

Problema 7 - Tra tutti i triangoli di cui due lati abbiano data lunghezza, quello di area massima è il triangolo rettangolo di cui i lati dati sono i cateti.

Problema 8 - Tra tutti i poligoni con lo stesso numero di lati e perimetro costante, il regolare ha area massima.
Per avere un'idea della dimostrazione si consideri un poligono ABCD...e si consideri ad esempio il triangolo ABC. Per quanto visto nel Problema 4 si può costruire un triangolo isoscele sulla base AC, avente lo stesso perimetro di ABC e area maggiore. Quindi dato un poligono di n lati che non sia equilatero se ne può sempre costruire uno con lo stesso perimetro che abbia area maggiore. Lo stesso discorso si può fare riguardo gli angoli. Riportiamo parzialmente la dimostrazione di Zenodoro. Egli dimostra innanzi tutto che:
Dati due triangoli isosceli non simili, si possono costruire sulle stesse basi due triangoli fra loro simili in modo che la somma dei loro perimetri sia eguale alla somma dei perimetri dei due primi triangoli e la somma delle aree dei triangoli simili sia maggiore della somma delle aree dei triangoli non simili.
Proviamo sulla base di tale proposizione che tra tutti i poligoni con lo stesso numero di lati e perimetro costante quello di area massima, oltre ad avere tutti i lati eguali deve avere anche tutti gli angoli eguali. Supponiamo che il poligono equilatero ABCDE abbia area massima ed abbia l'angolo in B maggiore dell'angolo in D. Allora BAC e DEC sono triangoli non simili. Su AC ed EC come basi si considerino due triangoli isosceli FAC e GEC simili, con la somma dei loro perimetri eguale alla somma dei perimetri dei triangoli ABC e DEC e la somma delle loro aree maggiore della somma delle aree dei triangoli ABC e DEC; Il poligono AFCGE ha allora area maggiore, a parità di perimetro e di numero di lati, contro l'ipotesi.

Osservazione: - Questo ragionamento, che si applica anche al triangolo, non prova che nella classe di tutti i poligoni di egual numero di lati aventi dato perimetro c'è un poligono di area massima, ma prova che, nel caso tale poligono esista, esso deve essere regolare. (Manca la dimostrazione dell'esistenza del massimo; infatti si possono presentare dei casi simili a quelli considerati in cui non c'è il massimo. Esempio – Dati due punti A e B e una retta AT che non passa per B, ci chiediamo qual è il più corto degli archi di curva che passano per A e B e sono tangenti in A ad AT. Si vede che il segmento stesso AB ha lunghezza inferiore a tutti questi archi, differendo da essi tanto poco quanto si vuole, ma la sua lunghezza non rappresenta il minimo richiesto. Ce ne possiamo rendere conto considerando i punti A=(-a,0) e B=(a,0) e come retta AT la retta di equazione x=-a. Consideriamo come curve delle semiellissi con centro nell'origine, situate nel semipiano delle y positive, passanti per A e B e tangenti in A alla retta di equazione x=-a. Esse hanno equazione y=$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ dove b è un qualsiasi numero positivo: è evidente che la loro lunghezza decresce al decrescere di b e quindi potremmo ritenere che il minimo sia dato dalla lunghezza del segmento AB. Ma il segmento AB non é tangente alla retta AT).

Problema 8 - Dimostrare che $(a+b)^2$ ≥4ab. Quindi tra tutti i rettangoli di dato perimetro il quadrato ha area massima e viceversa fra tutti i rettangoli di data area il quadrato ha perimetro minimo.

Dato un parallelogramma di dato perimetro si può costruire un rettangolo con lo stesso perimetro e area maggiore o eguale. Quindi il quadrato ha area massima nella classe di tutti i parallelogrammi che hanno lo stesso perimetro e perimetro minimo nella classe di tutti i parallelogrammi che hanno la stessa area.

Problema 9 - Tra due poligoni regolari P_1 e P_2 aventi lo stesso perimetro p, quello con numero di lati maggiore ha area maggiore.
Dim. - Consideriamo il poligono P_1 di n lati, sia ABCD... , sia M il punto medio del lato CD e consideriamo il triangolo BCM. Possiamo costruire un triangolo isoscele BFM con lo stesso perimetro p di BCM, ma area maggiore. Allora il poligono ABFMD... ha n+1 lati, lo stesso perimetro del poligono di partenza, ma area maggiore. Si può poi considerare il poligono regolare con n+1 lati avente lo stesso perimetro p, che avrà area ancora maggiore e si può inoltre iterare il procedimento determinando poligoni regolari aventi tutti lo stesso perimetro p e aree via via maggiori, fino a pervenire ad un poligono congruente a P_2. (Verificare la proprietà per n=3, 4,6.)

Di tale problema si può fornire anche una dimostrazione analitica che usa la trigonometria e il calcolo differenziale: si consideri un poligono regolare di n lati di perimetro fissato p. L'angolo formato congiungendo il centro con gli estremi di uno stesso lato è dato da 360/n, il lato del poligono è p/n e quindi l'apotema è data da $\frac{p}{2n}\text{ctg}\frac{\pi}{n}$. Ne segue che l'area del poligono è $A_n = \frac{p^2}{4n\,tg\frac{\pi}{n}}$.
Si tratta di funzione crescente di n; infatti la funzione $\frac{x}{tgx}$ è funzione decrescente di x per $0<x<\frac{\pi}{2}$, come si evince dallo studio della derivata: $\frac{tgx-\frac{x}{cos^2x}}{tg^2x}<0$ se sen(2x)<2x.

Problema 10 - Si considerino tutti i poligoni regolari aventi lo stesso perimetro p. Il cerchio la cui circonferenza ha lunghezza p ha area maggiore strettamente di ognuno di essi.
Dim. Dato un poligono regolare P di n lati, si consideri il cerchio C che ha lo stesso centro di P e lunghezza della circonferenza eguale a p: sia r il suo raggio. Si tracci la perpendicolare dal centro di C su un lato di P (il segmento di tale perpendicolare è l'apotema di lunghezza a). Non può essere a maggiore o eguale a r, altrimenti il cerchio C conterrebbe P e la sua circonferenza sarebbe maggiore strettamente di p. Quindi l'apotema a è minore di r e pertanto pa/2<pr/2, cioè l'area di P è minore dell'area di C.

Problema 11 - Perché non si può pavimentare una stanza usando solo pentagoni regolari? Perché per pavimentare una stanza con poligoni regolari si possono usare solo triangoli, quadrati o esagoni?
Dim. Se un poligono regolare ha n lati, ogni suo angolo misura $180^o\,\frac{n-2}{n}$. Per avere allora una pavimentazione con poligoni regolari di n lati, gli angoli devono essere sottomultipli dell'angolo giro, cioè $\frac{360\,n}{180(n-2)} = \frac{2n}{n-2}$ deve essere un numero intero. Ma $\frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} = 2+\frac{4}{n-2}$ e l'ultimo numero è intero solo se n-2≤4, cioè n≤6, da cui si ottiene la tesi cioè n=3,4, 6, scartando il valore n=5.

In un brano molto bello e suggestivo in apertura del Libro V della sua Collezione matematica , Pappo di Alessandria (vissuto nel IV secolo d.C.) loda la sagacia delle api, che con il loro istinto creano le cellette dei loro alveari di forma esagonale, poiché gli esagoni permettono un ricoprimento ottimale della superficie che hanno a disposizione senza che rimangano interstizi dove potrebbe annidarsi lo sporco, ottenendo nello stesso tempo di accumulare il maggior quantitativo di miele a parità di contorno con le altre figure, quindi col minor quantitativo di cera.

Problema 12 - Di tutte le curve chiuse di data lunghezza quella che racchiude l'area massima è il cerchio. Una dimostrazione si basa sulla formula: $4\pi A\leq p^2$, valida per ogni curva di perimetro p, A essendo l'area racchiusa dalla curva. Se infatti si pone nella formula p=2πr, allora si deduce che il massimo valore di A per cui tale relazione sussiste è A=πr^2, cioè la curva che racchiude la massima area è la circonferenza.

Alcune considerazioni di carattere storico sui problemi isoperimetrici

Racconta Enea, nel primo libro dell'*Eneide*, che Didone, perseguitata dal fratello Pigmalione, re della fenicia Tiro, decise di abbandonare la patria e radunata una flotta, e una gran quantità di uomini a lei fedeli e di beni, giunse nella terra dell'attuale Tunisia. Contrattò con il re del luogo, Iarba, ottenendo tanto suolo quanto potesse cingere con una pelle di bue. Sembrava uno scherno, eppure l'accorta regina, riuscì ad ottenere delle strisce sottilissime con cui, dopo averle legate l'una all'altra, recintò un ampio spazio semicircolare davanti al mare, fondando la città di Cartagine. Sembra quindi che, pur non avendo nozioni di matematica, con il suo intuito Didone capì che l'area maggiore che poteva cingere con le strisce era un'area semicircolare.
Ebbene però da altre fonti sembra che considerazioni tanto sagge non fossero molto diffuse nell'antichità. Apprendiamo dalle note di Proclo su Euclide che quei teoremi che provavano che due triangoli o due parallelogrammi aventi la stessa base e compresi tra le stesse rette parallele hanno la stessa area sembravano paradossali alle persone comuni dell'antichità perché se ne deduceva che si poteva ingrandire a dismisura il perimetro di un triangolo o di un parallelogramma senza alterarne l'area. Così erano possibili molti fraintendimenti errori e ...inganni. Racconta Proclo che alcuni geometri ricavavano informazioni circa la grandezza delle città dai loro perimetri. Egli cita anche membri di società comunitarie dei suoi tempi che imbrogliavano i loro seguaci dando loro una terra di perimetro maggiore ma di area inferiore a quella che essi prendevano per sé, così che mentre acquistavano gran reputazione per la loro onestà, di fatto prendevano molta più terra della quota che loro spettava. Ci sono altre testimonianze di errori dovuti a tale fraintendimento. Tucidite stima la grandezza della Sicilia dal tempo impiegato per circumnavigarla. Circa nel 130 a. C. Polibio osserva che c'erano persone che non riuscivano a capire che campi con lo stesso perimetro potevano avere diverse grandezze. Plinio dal canto suo confrontava la grandezza di diverse parti della terra aggiungendo alla loro lunghezza la loro larghezza.
Sebbene alcuni matematici avessero osservato l'erroneità di tali ragionamenti, il primo che se ne occupò in modo sistematico fu Zenodoro, matematico greco di cui non sono pervenute notizie. Pare sia vissuto nella seconda metà del secondo secolo a.C.. Egli scrisse un trattato, *Sulle figure isoperimetriche*, che non ci è pervenuto. Però alcune sue proposizioni sono state preservate dall'oblio grazie a un commentario di Teone di Alessandria sul Libro I dell'Almagesto di Tolomeo, del IV secolo d.C... Esse furono seguite molto da vicino da Pappo, all'inizio del Libro V della Collezione matematica (IV secolo d.C.), dove tratta la questione aggiungendo commenti e integrazioni.

L'interesse per i problemi isoperimetrici dopo Pappo sembra scomparire e ritroviamo considerazioni in forma più moderna solo nel 1600, da parte di Fermat e, verso la fine del Seicento, da parte dei fratelli Bernoulli, in contemporanea con la nascita del calcolo delle variazioni.
Solo nel 1838 il matematico svizzero Jacob Steiner(1796-1863) risolse il problema isoperimetrico in generale con svariati metodi geometrici tra cui un processo chiamato simmetrizzazione di Steiner.
Esso si basa sulle seguenti considerazioni.
a) Data una figura concava si può considerare, mediante opportuni ribaltamenti, una figura convessa che abbia lo stesso perimetro e area maggiore. Quindi, assegnato il perimetro p, fra tutte le figure aventi quel perimetro quella di area massima è convessa.
b) Assegnata una qualunque figura convessa (con contorno rettificabile) esiste una figura convessa avente lo stesso perimetro e area maggiore (o eguale) che sia simmetrica rispetto ad un opportuno asse.
E' allora possibile dare una dimostrazione della proprietà isoperimetrica del cerchio: cominciamo dimostrando il seguente

Teorema 1 – Supposto che tra tutte le curve di data lunghezza aventi gli estremi su una retta ce ne sia una che racchiude l'area massima, essa coincide con la semicirconferenza.

Dim. - Supponiamo infatti che la curva APB, di data lunghezza p, con i suoi estremi A e B su una retta r racchiuda l'area massima. Vogliamo dimostrare che l'angolo APB è retto. Ragioniamo per assurdo: se ciò non fosse, tenendo fissa la lunghezza dei segmenti AP e PB e tutta la zona di piano racchiusa fra ognuno di essi e la curva, potremmo spostare rigidamente P, e di conseguenza i punti A e B su r fino a che l'angolo APB sia retto. Dette A', P', B' le posizioni finali dei tre punti A, P, B, allora la regione compresa tra la curva A'P'B' e r avrebbe area maggiore della regione compresa tra APB e r, in quanto l'unica variazione in termini di area l'ha subita il triangolo, che, in quanto rettangolo, ha area maggiore dell'iniziale triangolo APB (vedi Problema 7), mentre le regioni comprese tra la curva di partenza e i due segmenti AP e PB sono state soltanto ruotate e trascinate su r; inoltre, per tale motivo, la lunghezza della curva A'P'B' è essa pure rimasta invariata, eguale a p.
Ne segue allora che se esiste la curva di lunghezza p che ha i suoi estremi su r e racchiude la massima area essa deve godere della proprietà che da ogni suo punto il segmento AB deve essere visto sotto un angolo di 90^o. Tale curva è la semicirconferenza.

Osservazione – Si osservi che la precedente manovra non conserva la convessità. Qualora, dopo averla effettuata la figura non risulti convessa, con un opportuno ribaltamento può essere resa convessa, aumentando ancora l'area, conservando la lunghezza e conservando anche l'angolo retto in P', punto corrispondente a P nel ribaltamento.

Teorema 2 – Se, fra tutte le curve chiuse di lunghezza p, ce n'è una che racchiude l'area massima, essa coincide con la circonferenza.

Dim. – Data la curva C di lunghezza p, siano A e B due punti su C che la dividano in due parti di eguale lunghezza p/2. Tracciamo la retta r per A e B e applichiamo il teorema 1 separatamente alle due parti, osservando che supposto che la curva C racchiuda l'area massima lo stesso avviene per le due curve che hanno gli estremi A e B su r. Otterremo come soluzione due semicirconferenze che hanno la stessa lunghezza e quindi formano una circonferenza.

Si noti che nel precedente discorso noi abbiamo ipotizzato l'esistenza di una curva della data lunghezza che racchiuda l'area massima, cosa che inizialmente Steiner non faceva. A più riprese Il matematico tedesco Dirichlet tentò di convincere Steiner che le sue dimostrazioni, come quelle di Zenodoro, erano incomplete per tale motivo. Alla fine, nel 1842 Steiner scriveva: "E la dimostrazione si ottiene facilmente se si assume che esista una figura massima".
Weierstrass, nelle lezioni a Berlino degli anni '70 diede la prima dimostrazione completa del problema, basata sul calcolo delle variazioni. Solo nel 1909 Constantin Charatheodory (1873-1950) in un lavoro con E. Study, diede forma rigorosa alla dimostrazione di Steiner, senza far uso del calcolo delle variazioni.

Bibliografia

Heath, Thomas, *A History of Greek Mathematics*, Dover publications, 1921-1981
Kline, Morris, *Storia del pensiero matematico*, Vol. I e II, Einaudi,1996
Virgilio, Publio Marone, *Eneide*, Libro I, 343-368
Sono inoltre consultabili su Internet diversi interventi al riguardo, tra cui si segnalano:
Gian Paolo Leonardi, Il mistero isoperimetrico di Zenodoro;
La sfera e le superfici minime. Capire il mondo attraverso una bolla.