Modelli Matematici con applicazioni in economia ed epidemiologia

A. Barbagallo - R. De Luca

Università degli Studi di Napoli

«Federico II»

Fin dagli albori della civiltà l’uomo è sempre stato incuriosito dal mondo a lui circostante e, appena ha avuto gli strumenti adatti, ha tentato di descriverlo e di capire l’origine dei fenomeni che osservava.

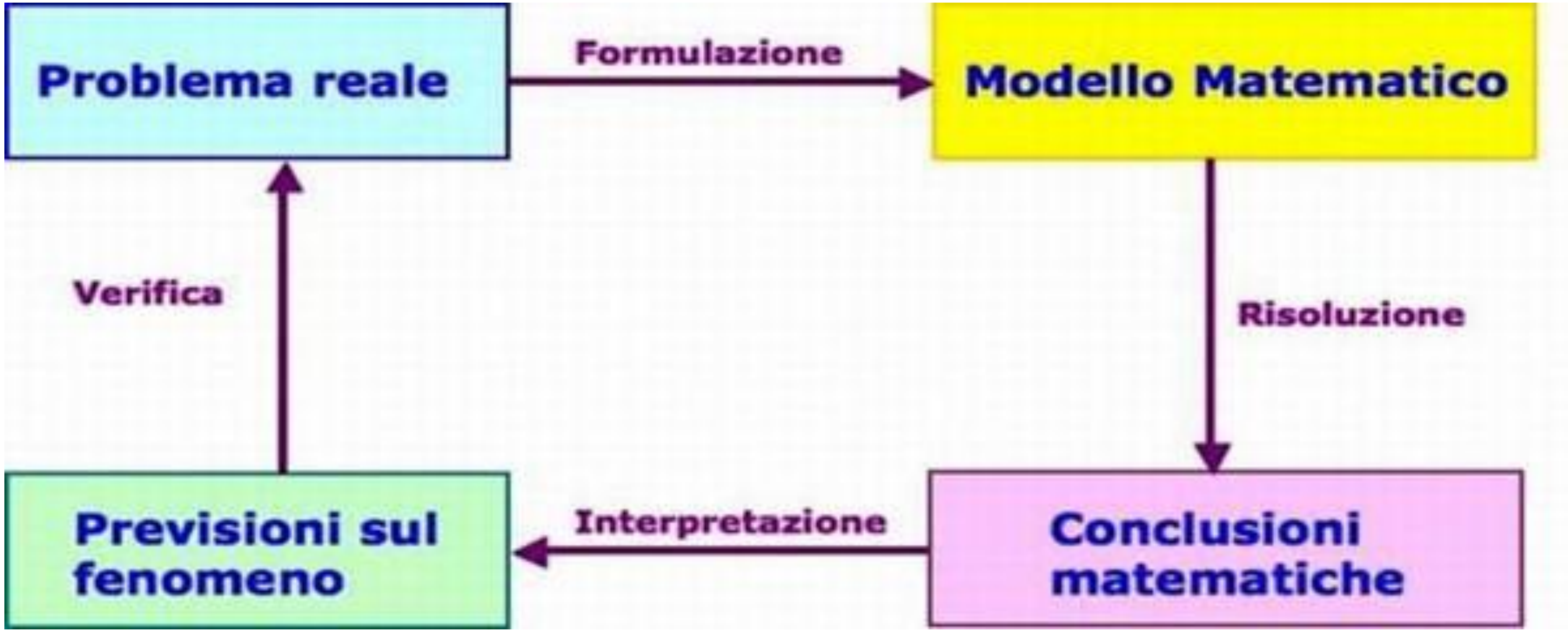
OCCORRE USARE IL METODO SCIENTIFICO

Descrivere un fenomeno usando il *metodo scientifico*, significa tentare di dare, quanto più è possibile, una descrizione oggettiva del fenomeno, o, equivalentemente, che:

- quello che viene descritto non deve dipendere da chi lo descrive;
- quello che viene descritto può essere descritto nuovamente, e nello stesso modo da chiunque (cioè, agli occhi di colui che lo esamini nelle stesse condizioni, il fenomeno si deve ripresentarsi con le stesse modalità).

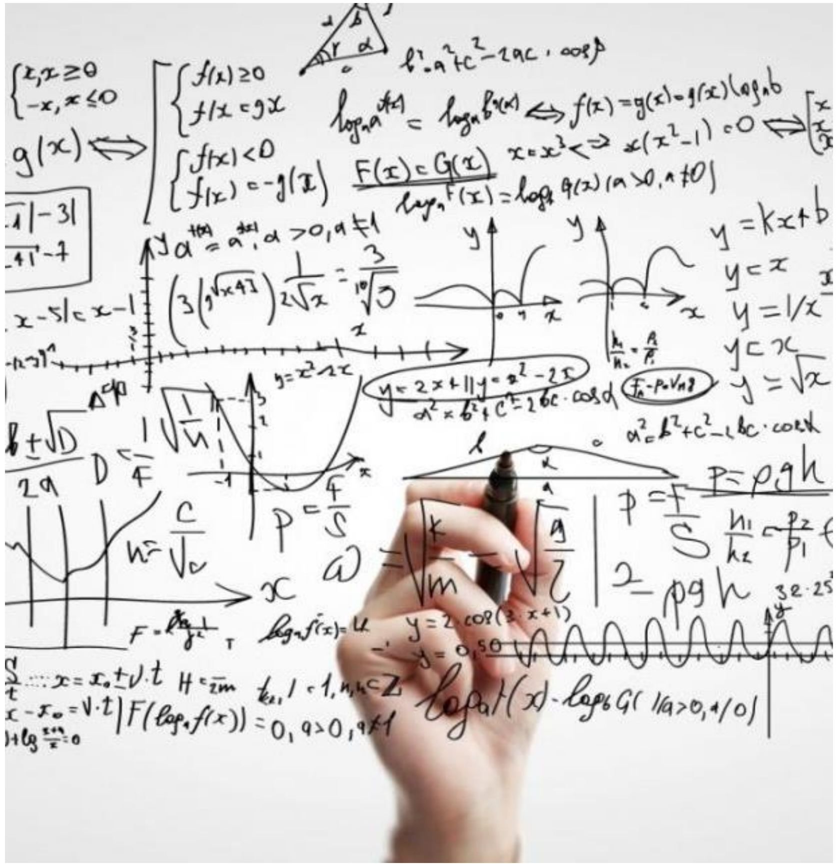
La matematica consente di:

- fornire un linguaggio per descrivere i fenomeni naturali;
- fornire strumenti per una migliore comprensione dei fenomeni naturali;
- fornire delle previsioni sull’andamento del fenomeno.



Modellistica matematica

- I modelli matematici sono **rappresentazioni limitate e semplificate** della realtà;
- Il modello matematico sarà tanto più aderente alle realtà tanto maggiore è il numero di variabili significative scelte per rappresentare il fenomeno;
- Man mano che il numero di variabili significative aumenta, le difficoltà matematiche legate allo studio del modello, aumentano;
- Per poter analizzare un modello matematico, occorre conoscere il **valore iniziale** delle variabili che si considerano.



Modelli epidemiologici

- Prevedere l'andamento di una malattia;
- Capire come adottare misure di controllo ottimali;
- Calcolare il rischio di morte o l’aspettativa di vita nel corso di una epidemia;
- Analizzare preventivamente il rapporto costi/benefici di azioni di profilassi

Dinamica delle epidemie

Le folle sono un terreno fertile per la diffusione delle malattie infettive: in una popolazione densa, avvengono molti contatti tra gli individui e quindi la probabilità di contrarre l'infezione aumenta

Come contrastare la propagazione di un’epidemia

- Per alcune malattie, è disponibile un vaccino
- Per altre malattie emergenti (e quindi poco note), si tenta un controllo mettendo in isolamento gli infetti accertati e in quarantena i sospetti infetti

Poiché non è possibile fare esperimenti al fine di comprendere quale strategia di contenimento è più efficace, si utilizzano modelli matematici per fare previsioni sugli scenari possibili.

Un po’ di storia….

- Daniel Bernoulli 1766: ideò un modello matematico che mostrava come l'inoculazione universale contro il vaiolo avrebbe aumentato l'aspettativa di vita da 26 anni e 7 mesi a 29 anni e 9 mesi;

- William Farr 1840:

«Se non è possibile scoprire la causa latente delle epidemie, è possibile indagare sul modo in cui opera. Le leggi della sua azione possono essere determinate dall'osservazione, nonché dalle circostanze in cui si verificano le epidemie o da cui possono essere controllate»

- Kermack-McKendrick 1927: modelli compartimentali

Modelli compartimentali

La popolazione costituita da N individui viene ripartita in classi disgiunte (compartimenti)

I compartimenti maggiormente usati nella modellistica matematica sono:

- S, i suscettibili, ovvero i sani che possono contrarre la malattia
- E, gli esposti, ovvero coloro che hanno contratto la malattia e che sono nel periodo di incubazione
- I, gli infettivi, ovvero coloro che hanno contratto la malattia e che possono trasmetterla
- R, i rimossi, ovvero coloro che sono stati malati e non sono più infetti perché guariti e immunizzati, morti o messi in quarantena

Il numero dei compartimenti e il meccanismo attraverso il quale un individuo può spostarsi da un compartimento ad un altro, è strettamente legato alla malattia in esame.

Il meccanismo più semplice di contagio è chiamato **azione di massa**: ogni individuo ha la stessa probabilità di contattare un qualsiasi altro individuo, indipendentemente dai contatti passati.

ESEMPI

MODELLI SIR: S → I → R (incubazione trascurabile, immunità permanente)

MODELLI SEIR: S→ E→I→R (incubazione non trascurabile, immunità permanente)

MODELLI SIRS: S → I → R→S (incubazione trascurabile, immunità non permanente)

MODELLI SEIRS: S→ E→I→R →S (incubazione non trascurabile, immunità non permanente)

MODELLI CON VACCINAZIONE: una parte dei suscettibili diventa, da subito, immune a causa della vaccinazione

Modello SIR (Kermack-McKendrick, 1927): ipotesi

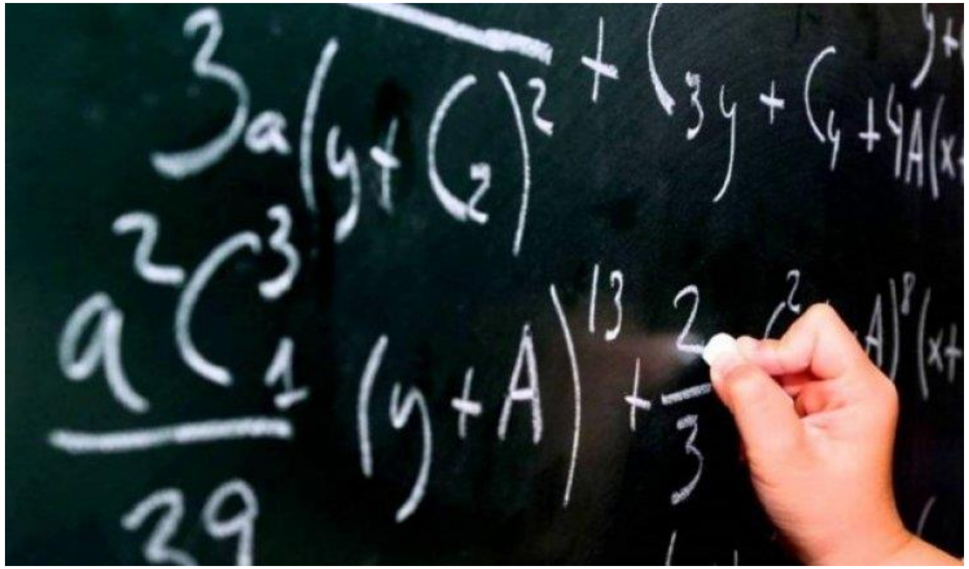
- La popolazione è divisa in tre classi disgiunte: S, I, R
- Il periodo di incubazione è trascurabile
- L'immunità acquisita è permanente
- La **popolazione rimane costante** durante il periodo in esame: **S + I + R = N**
- La **probabilità** di contrarre il virus è **uguale per tutti** i suscettibili e rimane costante durante il periodo in esame
- Il **contagio** avviene mediante **contatto diretto** fra un suscettibile e un infetto
- Il numero di contagi è direttamente proporzionale al **numero di incontri tra suscettibili e infetti**
- Il numero di rimossi è direttamente proporzionale al numero di infetti

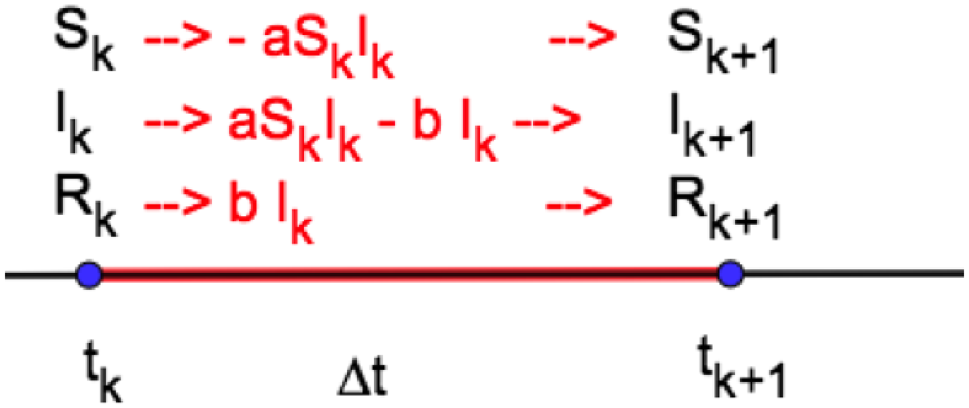
Modello SIR (Kermack-McKendrick, 1927)

a: tasso di infezione (tasso di contagio). Il suo reciproco 1/a è il tempo medio tra i contatti

b: tasso di recupero (tasso di guarigione). Il suo reciproco 1/b è il tempo medio infettivo

EQUAZIONI





$$\begin{cases} S_{k+1} = S_k - aS_kI_k\Delta t, \\ I_{k+1} = I_k + aS_kI_k\Delta t - bI_k\Delta t, \\ R_{k+1} = R_k + bI_k\Delta t \end{cases}$$

Problema:

- Tutte le persone, inizialmente, sono suscettibili (sane)

$S=N, \qquad I=0, \qquad R=0$

- Si introduce nella comunità un piccolo numero di infetti

$I>0$

Il piccolo numero di infetti è in grado di sviluppare un'epidemia?

ALCUNI PARAMETRI CARATTERISTICI

Il **numero basico riproduttivo** è il numero di casi infettivi secondari che si sviluppano da un individuo infetto durante il suo periodo di infettività, in una popolazione interamente suscettibile all'*inizio* di una epidemia

$$R_0 = aN/b$$

Il **numero di riproduzione effettivo** R_t è invece il numero di casi generati nello stato *attuale* di una popolazione e che dipende dalla frazione (V) di popolazione non suscettibile (immune all'infezione) essendo R_t funzione di $R_0(1 – V)$.

R_0 non può quindi essere modificato attraverso campagne di vaccinazione come invece avviene per R_t.

NUMERO BASICO RIPRODUTTIVO

$$I_{k+1} - I_k = aS_k I_k \Delta t - bI_k \Delta t,$$

L'epidemia si sviluppa solo se il numero degli infetti aumenta nel tempo, cioè se $I_{k+1} > I_k$ per ogni k

$$aS_k\, I_k\, \Delta t - b\, I_k\, \Delta t > 0 \quad \rightarrow \quad (aS_k - b)\, I_k\, \Delta t > 0 \quad \rightarrow \quad aS_k/b > 1$$

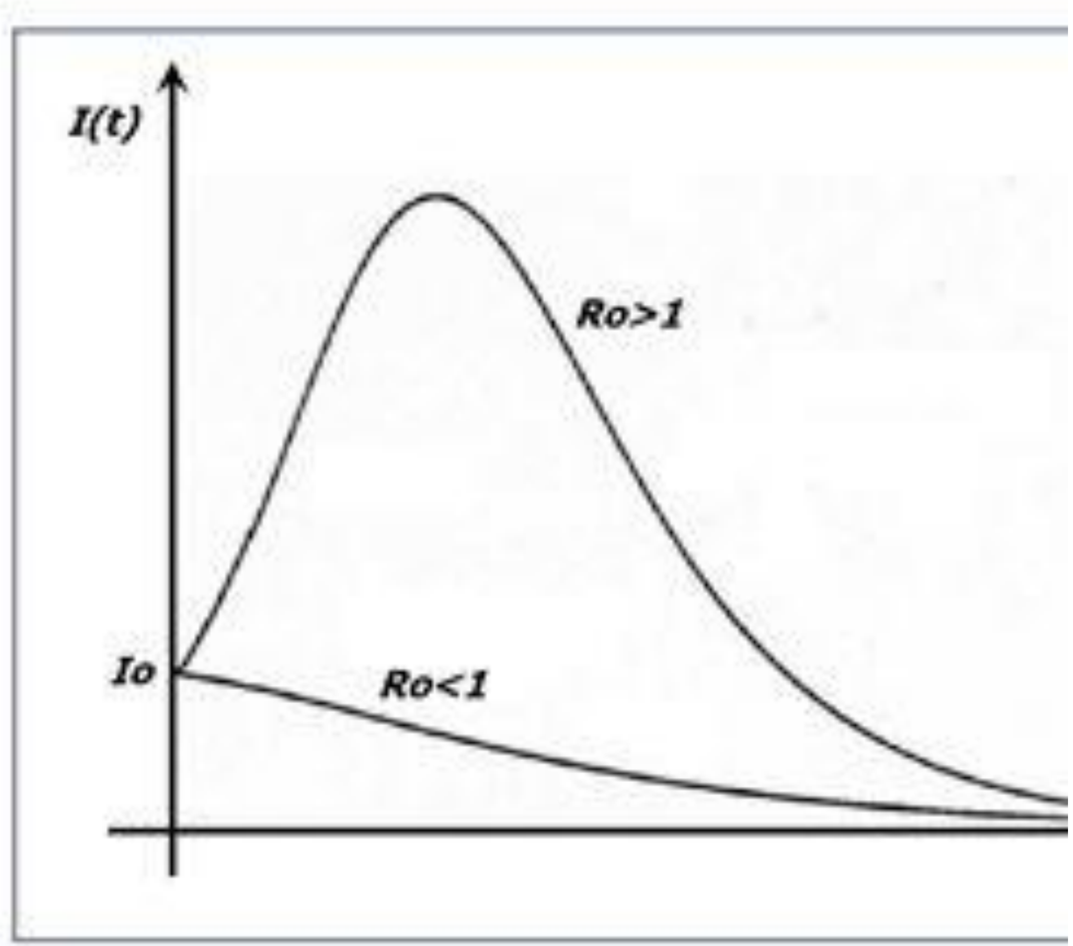
Nelle fasi iniziali dell'epidemia, potendo approssimare $S_k \approx N$ per ogni k ed essendo

$R_0 = aN/b$, si ha che l'epidemia si sviluppa se

$$R_0 > 1$$

Andamento dell’epidemia

- L’epidemia verrà eradicata se R_0 <1
- L’epidemia persisterà se R_0 >1



Alcuni esempi

Malattia	R_0
Morbillo	12-18
Vaiolo	5-7
Poliomielite	5-7
Rosolia	5-7
Parotite	4-7
HIV/AIDS	2-5
SARS-CoV	2-5
Influenza spagnola	2-3
COVID-19	1,4-2,5 (*)
Ebola (epidemia 2014)	1,5-2,5
(*) stime OMS, 23 gennaio 2020	

Malattia	Tasso di letalità
Morbillo	0,1 - 0,2%
Vaiolo	30%
Poliomielite	5-10%
Rosolia	3-6%
Parotite	0,01%
Difterite	5-10%
SARS-CoV	9-16%
MERS-CoV	30-40%
Pertosse	4%
Influenza stagionale	< 0,1%
COVID-19	2% (*)
Ebola	25-90%
(*) stime OMS, 3 febbraio 2020	

Strategie di contenimento per un'epidemia

$$R_0 = aN/b$$

- R_0 è direttamente proporzionale ad *a* (tasso di contatto con un infetto)
- R_0 è inversamente proporzionale a *b* (tasso di guarigione)

Per impedire il diffondersi di un'epidemia occorre far sì che $R_0 < 1$.

Questo lo si può ottenere grazie all'adozione di misure di igiene pubblica che riducono la probabilità di contagio (*a* diminuisce), e all'isolamento (quarantena) degli infetti in zone rosse o in ospedali (*b* aumenta).

Modello SIR con vaccinazione

La vaccinazione è uno dei metodi più efficaci per ridurre la diffusione e la mortalità delle malattie infettive

Supponiamo di vaccinare una porzione V di suscettibili prima di un'epidemia. La situazione, a inizio epidemia, è: S=N-V, I=0, R=V

$$\begin{cases} S_{k+1} = S_k - aS_kI_k\Delta t - VS_k\Delta t, \\ I_{k+1} = I_k + aS_kI_k\Delta t - bI_k\Delta t, \\ R_{k+1} = R_k + bI_k\Delta t + VS_k\Delta t \end{cases}$$

Modello SIR con vaccinazione

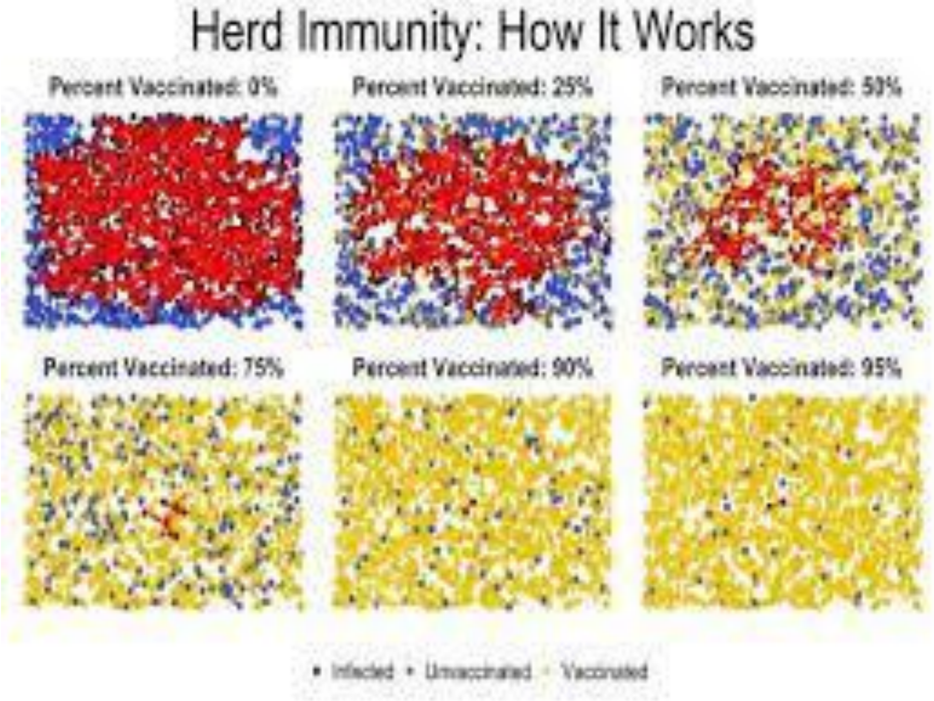
Numero basico riproduttivo: $R_0^v = R_0(1-V)$

L'epidemia non si innesca se: $R_0(1-V) < 1$

Quante persone occorre vaccinare?

$$V > 1 - \frac{1}{R_0}$$

La quantità $1 - \frac{1}{R_0}$ rappresenta l'**immunità di gregge**



Immunità di gregge

- Morbillo: $V > 1 - \frac{1}{18} = 0.94$

- Rosolia: $V > 1 - \frac{1}{6} = 0.83$

- Covid-19: $V > 1 - \frac{1}{2.5} = 0.6$

Epidemiologia comportamentale

Un fattore decisivo per l’effettivo successo dei protocolli di intervento è dato dal comportamento umano.

Nei Paesi dove l’immunizzazione è su base volontaria, le scelte individuali possono influire anche in maniera decisiva sulla trasmissione delle infezioni.

Nei primi anni 2000 nasce l’epidemiologia comportamentale

La vaccinazione è uno dei metodi più efficaci per ridurre la diffusione e la mortalità delle malattie infettive. Per una serie di fattori culturali e sociali, alcuni vaccini non sono obbligatori, sebbene molto efficaci nel prevenire le infezioni, e in molti Paesi si è registrata una crescente diminuzione dell'adesione alle campagne vaccinali. Ciò ha causato la ricomparsa di alcune malattie che, prevenibili con il vaccino, erano scomparse grazie proprio alla copertura immunitaria.

La riduzione della copertura vaccinale è dovuta alla diffusione di alcuni meccanismi pseudo-razionali che portano i genitori a sovrappesare il rischio (reale e immaginario) degli effetti collaterali al vaccino e a non percepire pienamente i rischi reali associati alla malattia.

Questo è paradossalmente dovuto alla rarità della presenza della malattia in questione. In effetti, tale rarità fa insorgere in un certo numero di genitori uno scetticismo razionale (``Perchè dovremmo esporre i nostri bambini agli effetti collaterali al vaccino, se tale malattia è eliminata o molto rara nel nostro Paese?‘’).

Ovviamente questo ragionamento non tiene conto del fatto che la malattia è stata pressochè eliminata in virtù degli alti livelli di copertura vaccinale. Inoltre, altri genitori fanno affidamento sugli effetti dell'immunità di gregge. Anche tale comportamento è irrazionale poichè l'immunità di gregge non è statica e permanente, ma è in continua evoluzione e dipende naturalmente dalla diffusa adesione alle campagne di vaccinazione.

Modello SIRV con comportamento

Nel modello si assume che il tasso di vaccinazione non sia costante, ma vari nel tempo in base alle scelte individuali.

Cosa può influire sulla scelta di vaccinarsi o meno?

Per modellizzare il processo decisionale riguardo la vaccinazione, sono stati proposti due approcci:

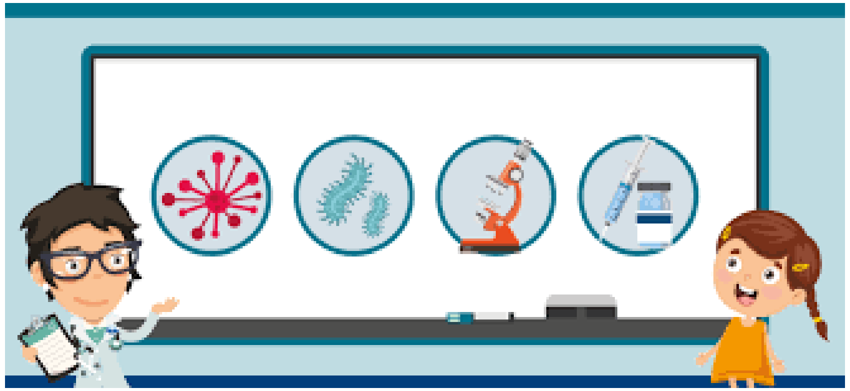
- Approccio costi/benefici (approccio economico), dove ogni individuo sceglie se vaccinarsi o meno in base al guadagno che egli percepisce riguardo la scelta di vaccinarsi;
- Approccio basato sull'informazione, dove un individuo sceglie se vaccinarsi o meno a seconda delle notizie disponibili che riguardano la malattia

APPROCCIO COSTO/BENEFICI

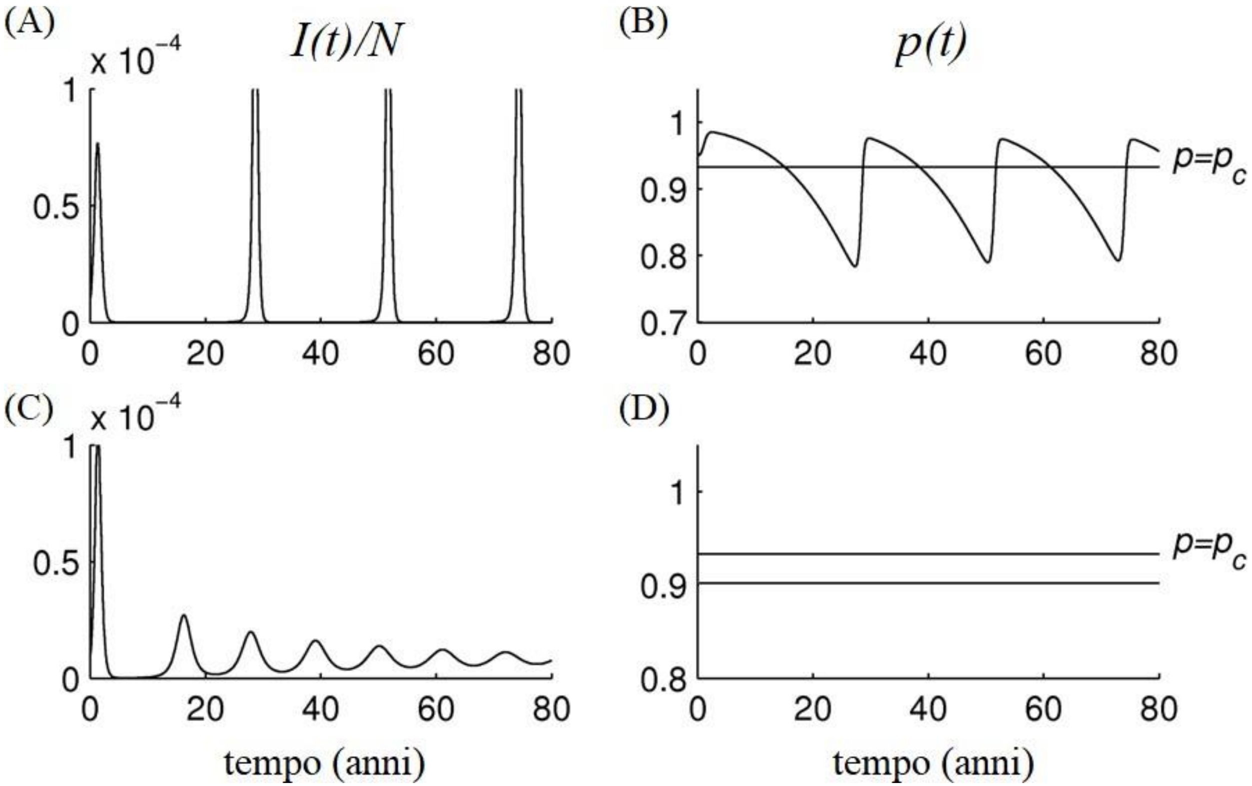
Fa uso della teoria dei giochi.

Gioco dell'imitazione: la decisione dei genitori di vaccinare o non vaccinare i propri figli sia condotta imitando gli altri che sembrano aver adottato strategie più efficaci.

Ciò avviene attraverso i canali della comunicazione privata spontanea.



1. Approccio costi–benefici



- Se $p(t)$ dipende dal comportamento individuale, la malattia risorge con ampiezza costante (pannello A), in conseguenza all'abbassamento periodico del tasso di vaccinazione nelle epoche di basso allarme (pannello B).

- Se p è costante (pannello D), le oscillazioni della prevalenza si smorzano nel tempo (pannello C).

TEORIA DEI GIOCHI

La **teoria dei giochi** studia il comportamento individuale in ambienti sociali in cui le azioni di ciascun individuo influenzano gli altri.

Questo strumento di analisi può essere usato per studiare non solo il sistema economico, ma anche altri ambienti sociali: per esempio la famiglia, la scuola, le relazioni internazionali tra gli Stati.

I GIOCHI

È possibile definire un **gioco** come uno scambio sociale con regole prestabilite.

Tre sono gli elementi essenziali che costituiscono un gioco:

1. giocatori: agenti razionali;
2. strategie: scelte dei giocatori;
3. pay-off: utilità dei giocatori.

DUE MANAGER

Immaginiamo che i manager di due imprese, una manifatturiera e l’altra un’agenzia di marketing, debbano decidere se stringere una partnership oppure no. Il valore congiunto totale delle due imprese ammonterebbe a 1.000.000 euro.

I due manager possono scegliere tra due strategie:

- negoziare direttamente con il management dell’altra azienda,
- affidare la negoziazione ad un avvocato.

DUE MANAGER

Se negoziano direttamente non devono sostenere alcuna spesa; mentre se assumono un avvocato lo devono pagare 50.000 euro, ma possono aumentare il ricavo derivante dalla partnership di 100.000 euro, a danno della controparte. Quindi possiamo definire i pay-off di ciascun manager come segue:

- $\frac{1000}{2}$= 500: se entrambi negoziano direttamente;
- 600.000 – 50.000 = 550.000: se il manager assume un avvocato, ma la controparte negozia direttamente;
- 500.000 – 100.000 = 400.000: se il manager negozia direttamente, ma la controparte assume un avvocato;
- 500.000 – 50.000 = 450.000: se entrambi i manager assumono un avvocato.

OSSERVAZIONE

I pay-off non rappresentano necessariamente i profitti delle imprese, ma descrivono l'**utilità** che gli agenti traggono dal verificarsi di una certa combinazione di strategie.

In questo esempio specifico, l'utilità coincide con il profitto delle imprese, perché l'obiettivo dei manager nel decidere le modalità con cui contrattare le condizioni della partnership, è ricavare il maggior profitto possibile per la propria impresa.

Università degli Studi di Napoli Federico II

E` possibile e utile rappresentare questo tipo di gioco, in cui ci sono solo due giocatori, che decidono simultaneamente, con la seguente tabella:

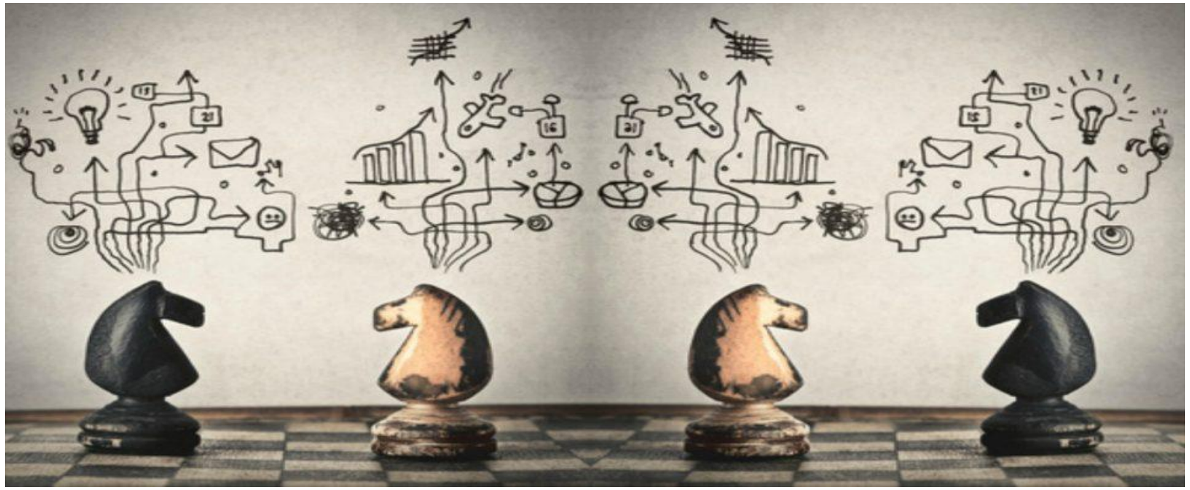
		CEO MKT	
		direttamente	avvocato
CEO IND	Direttamente	500.000; 500.000	400.000; 500.000
	Avvocato	550.000; 400.000	450.000; 450.000

GIOCO IN FORMA STRATEGICA

DEFINIZIONI

Un gioco in *forma strategica* è definito da tre componenti:

1. giocatori;
2. insieme di strategie;
3. pay-off di ciascun giocatore.



Definiamo:

- I l'insieme di tutti i giocatori;
- N il numero dei giocatori o $\#(I)$;
- $k \in I$ il giocatore k-esimo;
- X_k insieme delle strategie disponibili al giocatore k-esimo;
- $x_k \in X_k$ una strategia disponibile al giocatore k-esimo.

GIOCO IN FORMA STRATEGICA

- I = { CEO MKT. ; CEO IND.}
- $N = 2$
- X_{IND} = {negoziare direttamente; avvocato}
- X_{MKT} = {negoziare direttamente; avvocato}

GIOCO IN FORMA STRATEGICA

Definiamo:

- $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ profilo di strategie, che specifica per ogni giocatore k-esimo, appartenente all'insieme dei giocatori I, una strategia disponibile a k.
- $X = \prod_{k=1}^{n} X$ (prodotto cartesiano di tutti gli X_k) l'insieme di tutte le possibili combinazioni di strategie di tutti i giocatori.
- $x_{-i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ un profilo di strategie di tutti i giocatori diversi da i;
- $X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$ l'insieme di tutte le possibili combinazioni di strategie di tutti i giocatori diversi da i,
- $x_{-i} \in X_{-i}$ un profilo di strategie di tutti i giocatori diversi da i.

EXAMPLE

GIOCO IN FORMA STRATEGICA

- x_{IND} = negoziare direttamente
- $x_{MKT} = x_{-IND}$ = negoziare direttamente
- $x = (x_{IND}, x_{MKT}) = (x_{IND}, x_{-IND})$ = (negoziare direttamente, negoziare direttamente)
- $X = X_{IND} \times X_{MKT}$ = { (negoziare direttamente, negoziare direttamente), (negoziare direttamente, avvocato), (avvocato, negoziare direttamente), (avvocato, avvocato)}

N.B. Quindi un profilo di strategie x può essere definito in due modi equivalenti: $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ oppure (x_i, x_{-i}).

IL PAY-OFF

Definiamo **pay-off** di ogni giocatore una funzione che associa a ciascun profilo strategico un numero reale:

$$U_i \colon X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

I pay-off (o funzioni di utilità) di ciascun giocatore dipendono dalle strategie scelte da tutti gli altri giocatori e rappresentano le preferenze del giocatore.

<u>Formalmente</u>:

$$U_i(\boldsymbol{x}) > U_i(\boldsymbol{x}')$$

$\Longleftrightarrow$ il risultato che deriva dal profilo di strategie $\boldsymbol{x}$ è preferito al risultato derivante dal profilo $\boldsymbol{x}'$.

GIOCO IN FORMA STRATEGICA

- U_{IND}(negoziare direttamente; negoziare direttamente) = 500
- U_{IND}(negoziare direttamente; avvocato) = 400
- 500.000 > 400.000 $\Longleftrightarrow$ (negoziare direttamente; negoziare direttamente) $\succ$ (negoziare direttamente; avvocato)

GIOCO CON STRATEGIE FINITE

Nel caso particolare in cui $\#(I) = 2$ e ogni giocatore ha un numero finito di strategie tra cui scegliere (X ha un numero finito di elementi), la funzione pay-off può essere rappresentata per mezzo di una matrice.

In questa matrice ogni riga corrisponde a una delle strategie disponibili al giocatore 1 e ogni colonna a una delle strategie disponibili al giocatore 2. In ogni riquadro della matrice sono inseriti due valori: il pay-off del giocatore 1 (a sinistra) e il pay-off del giocatore 2 (a destra).

Università degli Studi di Napoli Federico II

GIOCO CON STRATEGIE FINITE

Generalizzando, i pay-off nel riquadro della matrice all'incrocio tra riga m e colonna n saranno:

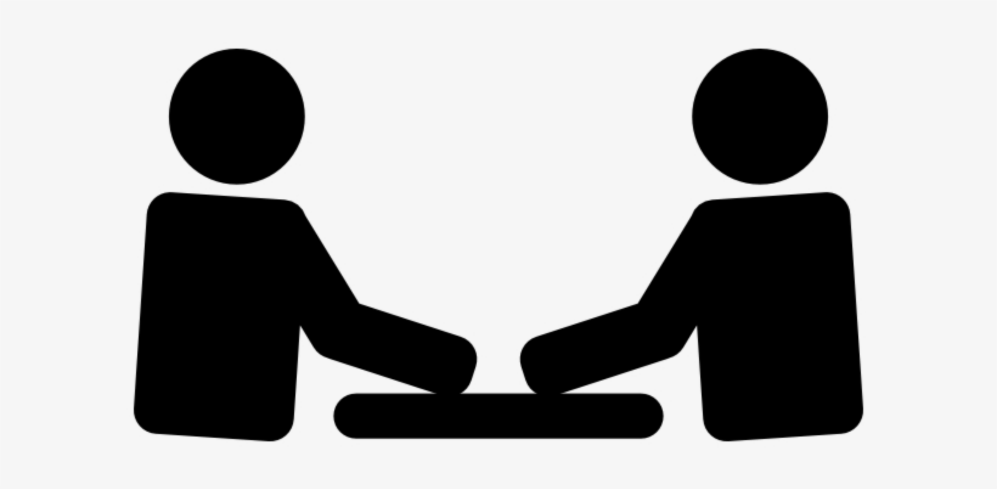
$$U_1(m,n)\ , \qquad U_2(m,n)$$

cioè saranno i pay-off dei giocatori quando il giocatore 1 sceglie la strategia m e il giocatore 2 sceglie la strategia n.

STRATEGIE DOMINANTI FORTI

I pay-off di ciascun giocatore dipendono dalle scelte di tutti gli altri giocatori.

Tuttavia, in alcune circostanze, il giocatore i-esimo può essere in condizione di fare il seguente ragionamento: «Qualunque cosa scelgano gli altri giocatori, la strategia x_i è strettamente preferibile a qualunque altra strategia x_i' a me disponibile.»



EXAMPLE

- I= {1,2}
- X_1= { Top, Bottom }
- X_2= { Left, Right }

		2	
		L	R
1	T	3; 3	1; 2
	B	2; 0	0; 0

Top è una strategia dominante forte per 1 perché:

- $U_1(T, L) > U_1(B, L)$ (i.e. 3>2)
- $U_1(T, R) > U_1(B, R)$ (i.e. 1>0)

Left NON è una strategia dominante forte per 2, perché:

- $U_2(T, L) > U_2(T, R)$ (i.e. 3>2)
- $U_2(B, L) = U_2(B, R)$ (i.e. 0=0)

STRATEGIE DOMINANTI FORTI

Definizione:

Una strategia $x_i \in X_i$ è detta **strategia dominante forte** se $\forall x_i' \neq x_i$ e $\forall x_{-i} \in X_{-i}$ vale la seguente disuguaglianza:

$$U_i(x_i, x_{-i}) > U_i(x_i', x_{-i})$$

Definizione:

Se CIASCUN giocatore ha una strategia dominante forte, la combinazione di queste strategie è chiamata **soluzione del gioco con strategie dominanti forti**.

Questo tipo di soluzione è la più robusta possibile in teoria dei giochi, perché richiede il minor numero di assunzioni circa il comportamento dei giocatori.

DILEMMA SOCIALE

EXAMPLE

Due studenti, che condividono un appartamento, devono decidere se collaborare nel pulire la cucina oppure non collaborare e non pulire.

- I = {studente-1, studente-2}
- X_i = {Cooperare, Non Cooperare} , i = {1, 2}

		2	
		C	NC
1	C	2; 2	0; 3
	NC	3; 0	1; 1

- Per lo studente-1 Non Cooperare è una strategia dominante forte: $U_1(NC,C) > U_1(C,C)$ (i.e. 3>2) e $U_1(NC,NC) > U_1(C,NC)$ (i.e. 1>0)
- Per lo studente-2 Non Cooperare è una strategia dominante forte: $U_2(C,NC) > U_2(C,C)$ (i.e. 3>2) e $U_2(NC,NC) > U_2(NC,C)$ (i.e. 1>0)

Quindi entrambi gli studenti non puliscono la cucina. Questo risultato è la soluzione ottimale dal punto di vista individuale, anche se è sub-ottimale dal punto di vista sociale.

Infatti: $U_1(C,C) > U_1(NC,NC)$ e $U_2(C,C) > U_2(NC,NC)$ (i.e. 2>1)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

Il dilemma sociale viene anche chiamato **dilemma del prigioniero**, perché fu rappresentato per la prima volta con il seguente esempio.

Due delinquenti vengono catturati dalla polizia, che ha un numero di prove sufficiente per incriminarli e condannarli ad una pena di 1 un anno di reclusione. Se uno dei due confessa potrà godere di uno sconto di pena per aver collaborato con la giustizia ed essere subito rilasciato, ma le informazioni fornite permetterebbero di condannare il complice a cinque anni di reclusione.

Se entrambi confessano, entrambi verranno condannati a cinque anni di detenzione, ma, per aver collaborato, gli sarà concesso uno sconto di due anni sulla pena e quindi rimarranno in carcere solo 3 anni.

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

In sintesi:

- I = {delinquente-1, delinquente-2}
- X_i = {Confessare, Non Confessare} , i = { 1, 2}

		2	
		NC	C
1	NC	-1; -1	-5; $\underline{0}$
	C	$\underline{0}$; -5	$\underline{-3}$; $\underline{-3}$

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

Come nel caso precedente per entrambi i giocatori Confessare è la strategia dominante forte (0 > 1 e 3 > 5). Così facendo però si condannano a 3 anni di reclusione, mentre se avessero collaborato e taciuto avrebbero scontato solo un anno di galera.

La contraddizione tra ciò che è ottimale dal punto di vista individuale e ciò che è ottimale dal punto di vista collettivo costituisce un dilemma sociale. Questa contraddizione è insuperabile nei giochi in forma strategica, poiché gli agenti non hanno modo di coordinarsi. Si tratta della cosiddetta **trappola della strategia dominante**.

EXAMPLE

STRATEGIE DOMINANTI DEBOLI

Ci sono situazioni in cui un giocatore **non** ha una strategia che gli garantisce un pay-off **strettamente maggiore** rispetto a quello prodotto da tutte le altre strategie, a prescindere dalle scelte degli altri giocatori. Tuttavia è ancora possibile individuare una strategia disponibile al giocatore che produca un pay-off **maggiore o uguale** a quello prodotto da ogni altra.

Questa strategia è detta **dominante debole**.

STRATEGIE DOMINANTI DEBOLI

Definizione formale

$x_i \in X_i$, $i \in I$ è detta strategia dominante debole se $\forall\, x_i' \neq x_i \in X_i, \forall j \neq i$ vale:

$U_i(x_i, x_{-i}) \geq U_i(x_i', x_{-i})$ e $\exists \hat{x}_{-i} \in X_{-i}\ \ \forall j \neq i$ tale che $U_i(x_i, \hat{x}_{-i}) > U_i(x_i', \hat{x}_{-i})$

Esempio:

- I = {1, 2}
- X_1 ={T,B}, X_2 ={L,R}

		2	
		L	R
1	T	3; <u>3</u>	1; 2
	B	2; <u>0</u>	0; <u>0</u>

- L dominante debole per il giocatore 2:

$$U_2(T,L) > U_2(T,R)\ (i.e. 3 > 2),\ \ U_2(B,L) = U_2(B,R)\ \ (i.e. 0 = 0)$$

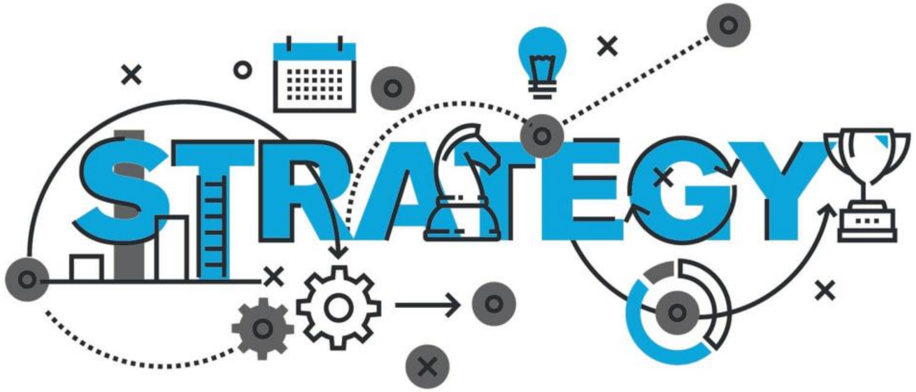
- T per 1 è dominante forte:

$$U_1(T,L) > U_1(B,L)\ (i.e. 3 > 2), \qquad U_1(T,R) > U_1(B,R)\ \ (i.e. 1 > 0)$$

STRATEGIE DOMINANTI DEBOLI

Definizione

Se ciascun giocatore ha una strategia dominante debole, il profilo di strategie composto dalle strategie dominanti deboli di tutti i giocatori è la soluzione del gioco. Tale soluzione è chiamata **soluzione in strategie dominanti deboli**.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

Asta al secondo prezzo

Immaginiamo un'asta in cui il banditore mette in palio un quadro al miglior offerente.

Regole dell'asta:

- Ogni giocatore deve scrivere su un foglio la propria offerta;
- vince chi fa l'offerta più alta;
- il vincitore pagherà un prezzo pari alla seconda offerta più elevata;
- se ci sono due o più offerte massime identiche, si tira a sorte il vincitore.

Nessuna regola formale vieta ai giocatori di fare un'offerta diversa rispetto al vero valore che, in cuor loro, attribuiscono al quadro.
L'utilità di ciascun giocatore dipende dal valore che attribuisce all'oggetto, dalla propria offerta e dalle offerte di tutti gli altri partecipanti all'asta.

Asta al secondo prezzo

Giocatori={A, B, C}, fanno le seguenti offerte:

Vince il giocatore A, ma paga 90.

	A	B	C
OFFERTA	100	80	90

EXAMPLE

Asta al secondo prezzo

<u>Notazione</u>:
- n numero di partecipanti all'asta
- $k+1$ numero di offerte massime uguali, cioè numero di giocatori che si contendono il premio.
- v_i valore che il giocatore i-esimo attribuisce al quadro;
- $b_i \geq 0$ offerta del giocatore i-esimo;
- r prezzo effettivamente pagato dal giocatore che vince l'asta.

<u>Risulta che</u>:
$b_i = v_i$ è una strategia dominante debole.

Ovvero è ottimale dire la verità sul valore che si assegna al bene.

La battaglia dei sessi

Immaginiamo una coppia di fidanzati che devono decidere come passare il sabato pomeriggio.

- Sara vorrebbe andare al cinema,
- mentre Marco preferisce andare allo stadio.

La cosa più importante però è stare insieme.

<u>Schematicamente:</u>

- $I = \{Sara, Marco\};$
- $X_{Sara} = \{Stadio, Cinema\};\ X_{Marco} = \{Stadio, Cinema\};$

La battaglia dei sessi

		Marco	
		CINEMA	STADIO
Sara	CINEMA	2; 1	0; 0
	STADIO	0; 0	1; 2

In questo gioco ci sono due soluzioni: (CINEMA, CINEMA) e (STADIO, STADIO).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

EQUILIBRIO DI NASH

<u>Definizione</u>:

Dato $x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, un profilo di strategie di tutti i giocatori diversi dall'i-esimo e $x_i^* \in X_i$, una strategia disponibile al giocatore i-esimo.
x_i^* si definisce **miglior risposta dato $\boldsymbol{x_{-i}}$** se non esiste una strategia $x_i \in X_i$ che dà al giocatore i -esimo un pay-off più alto:

$$U_i(x_i^*, x_{-i}) \geq U_i(x_i, x_{-i}), \qquad \forall x_i \in X_i.$$

EQUILIBRIO DI NASH

Definizione:

$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$ si definisce **equilibrio di Nash** se per ogni giocatore $i \in I$ la strategia x_i^* è una miglior risposta al profilo di strategia x_{-i}^* di tutti gli altri giocatori. In altre parole, x_i^* è la miglior risposta alle migliori risposte di tutti gli altri giocatori.

In modo formale:
$\boldsymbol{x}^*$ è un equilibrio di Nash se

$$\forall i \in I, \qquad U_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq U_i(x_i, x_{-i}^*), \qquad \forall x_i \in X_i.$$

SIGNIFICATO

Si può dire che un profilo di strategie è un equilibrio di Nash se nessun giocatore ha interesse a deviare unilateralmente, ovvero nessun giocatore può aumentare il proprio pay-off scegliendo una strategia diversa da x_i^* quando tutti gli altri scelgono il profilo di strategie x_{-i}^*.

Osservazione:

Il concetto di equilibrio di Nash è più ampio e richiede meno assunzioni rispetto alle soluzioni che abbiamo studiato in precedenza. Infatti: sia le soluzioni in strategie dominanti forti, sia le soluzioni in strategie deboli sono equilibri di Nash.

✓ Il dilemma del prigioniero ha una soluzione in strategie dominanti forti data dal profilo di strategie (Confessare, Confessare) e tale soluzione è un equilibrio di Nash.

✓ Nell’asta al secondo prezzo, la soluzione in strategie dominanti deboli, data dal profilo di strategie $\{b_i = v_i, \ \forall i\}$, è un equilibrio di Nash.

Università degli Studi di Napoli Federico II

Ci possono essere più equilibri di Nash all'interno dello stesso gioco strategico, cioè più soluzioni possono coesistere contemporaneamente.

La battaglia dei sessi è un tipico esempio di gioco con soluzioni multiple in strategie dominanti deboli.

		Marco	
		CINEMA	STADIO
Sara	CINEMA	2; 1	0; 0
	STADIO	0; 0	1; 2

Università degli Studi di Napoli Federico II

Divisione di un tesoro

Il capo di una tribù trova un cofanetto contenente 4 monete d’oro. Due famiglie della tribù sostengono di esserne proprietarie. Per risolvere la disputa il capo tribù decide che i membri delle due famiglie dovranno simultaneamente e separatamente dire al capo tribù quante delle monete contenute nel cofanetto vogliono tenere per sé.

Se complessivamente le richieste non sono maggiori di 4 monete, ogni famiglia riceverà quanto richiesto e il capo tribù terrà per se stesso il resto. Invece se le richieste complessivamente superano le 4 monete, il capo tribù terrà tutte le monete per sé.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

EXAMPLE

Divisione di un tesoro

Studiamo il possibile comportamento delle famiglie per mezzo di un gioco in forma strategica:

- I = {famiglia A, famiglia B }
- $X = X_A \times X_B$={0,1,2,3,4} × {0,1,2,3,4}

Quanti equilibri di Nash ci sono?

Gli equilibri di Nash in questo gioco sono: $\begin{cases} x^1 = (x_A = 0, x_B = 4); \\ x^2 = (x_A = 1, x_B = 3); \\ x^3 = (x_A = 2, x_B = 2); \\ x^4 = (x_A = 3, x_B = 1); \\ x^5 = (x_A = 4, x_B = 0). \end{cases}$

La matematica è l'alfabeto

nel quale Dio ha scritto l'universo

G. Galilei

GRAZIE PER L'ATTENZIONE