

*Jean-Baptiste Siméon Chardin,  
"Le bolle di sapone o Ragazzo che  
fa le bolle di sapone" (1734)*



*Eduard Manet,  
"Ragazzo che soffia le bolle di  
sapone" (1867)*

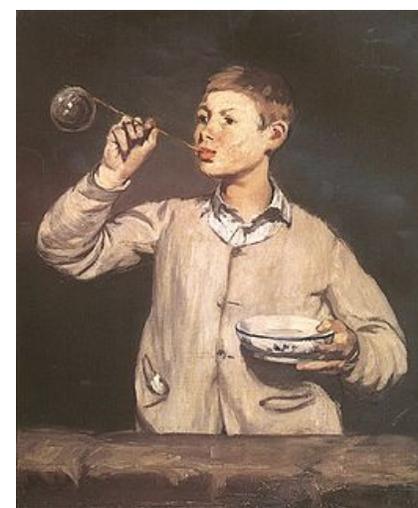


# LA MATEMATICA IN UNA BOLLA DI SAPONE

Università degli Studi di Napoli Federico II  
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"  
Febbraio 2018



## LE BOLLE DI SAPONE: SOLO UN GIOCO?



*Abbi divertimento sulla terra e sul mare  
Infelice è il diventare famoso  
Ricchezze, onori, false illusioni di questo mondo  
Tutto non è che bolle di sapone.*

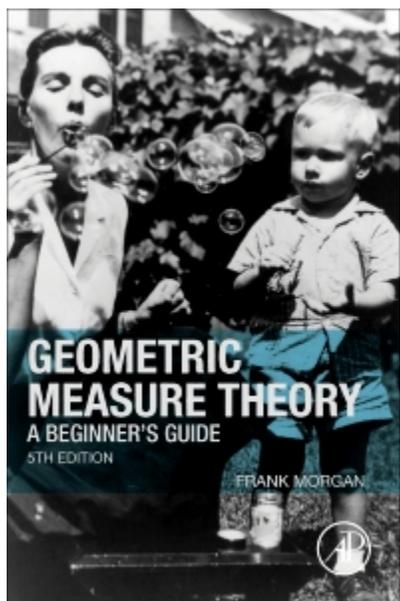
Il 9 dicembre 1992 il fisico francese Pierre-Gilles de Gennes, professore al Collège de France, dopo il conferimento del premio Nobel per la fisica concludeva la sua conferenza a Stoccolma con questa poesia, aggiungendo che nessuna conclusione gli sembrava più appropriata. La poesia compare come chiosa di una incisione del 1758 di Daullé dall'opera andata perduta di François Boucher *La souffleuse de savon*.

De Gennes non voleva alludere ai significati allegorici che per molti secoli hanno avuto le bolle di sapone: simbolo della vanità, della fragilità delle ambizioni umane, della vita stessa. Le bolle di sapone erano uno degli argomenti della sua relazione, che era tutta dedicata alla *Soft matter* (varietà di stati fisici facilmente deformabili da variazioni termiche e di cui fanno parte liquidi, colloidi, polimeri, schiume, gel, materiali granulari, e svariati tipi di materiali biologici).

# LE BOLLE DI SAPONE: SOLO UN GIOCO?



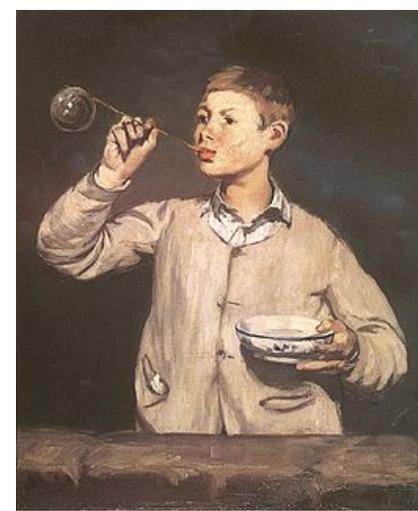
Nel suo racconto di viaggio *Innocent Abroad* (1869) Mark Twain ha scritto che “una bolla di sapone è la cosa più bella, e la più elegante, che ci sia in natura... Mi chiedo quanto sarebbe necessario per comprare una bolla di sapone se al mondo ne esistesse soltanto una”.



Questa frase è citata in un articolo apparso sul New York Times nel 1982. L'articolo era intitolato *Soap bubbles get a new role in old mathematics problems* e consisteva in un'intervista al matematico americano Frank Morgan, il cui campo di attività erano e continuano ad essere le bolle di sapone.

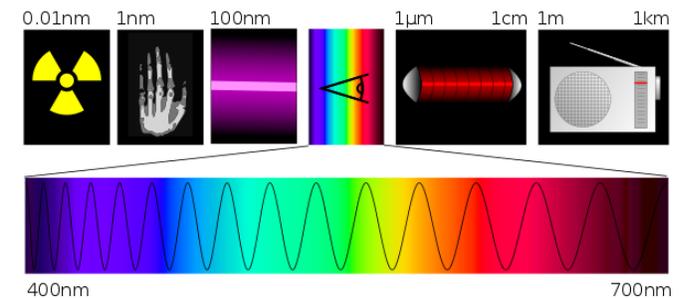


# LE BOLLE DI SAPONE: SOLO UN GIOCO?



L'interesse scientifico per le bolle di sapone non è affatto recente.

Molti fenomeni legati alla tensione superficiale, come la formazione delle lamine di sapone, erano stati osservati fin dai tempi antichi, fin da quando circa tremila anni fa in Siria fu inventato il sapone. Gli antichi pensatori avevano notato che, mentre la lamina di sapone si va assottigliando, si vedono comparire sulla sua superficie tutti i colori dell'arcobaleno. Questo fenomeno per molti secoli fu ritenuto magico e solo nel 1800 fu collocato nell'ambito fisico dei fenomeni di interferenza che, nelle bolle di sapone, si verificano quando lo spessore della lamina è paragonabile alla lunghezza dell'onda luminosa (400-700 nm).





## LA STORIA MATEMATICA DELLE BOLLE DI SAPONE



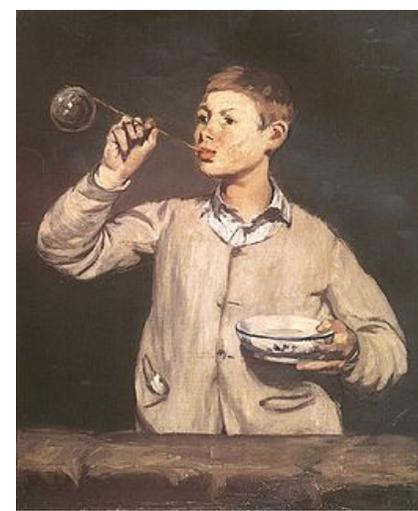
Ad un certo punto gli scienziati cominciarono a porsi delle domande sulla struttura, sul colore delle lamine di sapone, probabilmente spinti dal vedere tanti bambini che giocavano per le strade. Il primo a porre dei quesiti scientifici sulle bolle, in particolare sul colore, fu Isaac Newton (1642-1727).

Solo negli anni in cui Bizet (1838-1875), l'autore della Carmen, componeva delle musiche *per bambini* tra cui un brano intitolato "Bolle di sapone", iniziava la storia *matematica* di bolle e lamine di sapone. Per i matematici le bolle di sapone erano modelli di una geometria delle forme molto stabili, e solo qualche anno dopo che Manet dipinse il suo quadro, il fisico belga Joseph Plateau (1801-1883) pubblicò in due volumi i risultati delle sue ricerche sulle lamine di sapone.

<https://www.youtube.com/watch?v=QbejBzoWFK4>



# LA STORIA MATEMATICA DELLE BOLLE DI SAPONE



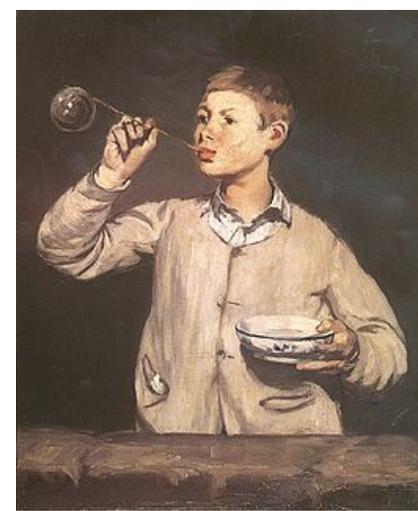
Mentre Plateau conduceva esperimenti sistematici con le lamine di sapone, i matematici, soprattutto di scuola tedesca, si dedicavano intensamente a studiare principi di minimo (o massimo), principi per cui la condizione che realizza un fenomeno corrisponde ad un criterio di minimo (o massimo) assoluto e realizza perciò la massima economia del sistema



Problemi di ottimizzazione



# LA STORIA MATEMATICA DELLE BOLLE DI SAPONE



Nelle foto, alcuni dei matematici che hanno dato contributi in questo campo:  
K. Weierstrass, A. Enneper, H. Scherk, H. Schwarz, B. Riemann, E. Catalan.





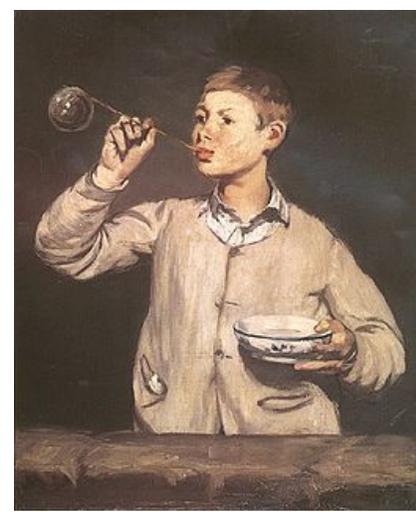
## A PROPOSITO DEL SAPONE...



- Di che materia è composto il sapone?
  - Perché il sapone lava?
  - Da dove proviene la schiuma del sapone?
  - Per fare delle bolle, il sapone è veramente indispensabile?
- 
- Da dove proviene la parola bolla? Ha qualcosa a che vedere anche con altre parole “vicine” come bollo, e il derivato francobollo, e poi bollino, bolletta, bollettino, bollire,...?

...COMPITINO PER CASA...

# A PROPOSITO DEL SAPONE...



[http://dm.unife.it/matematicainsieme/schiume/perc\\_chimica02.htm](http://dm.unife.it/matematicainsieme/schiume/perc_chimica02.htm)

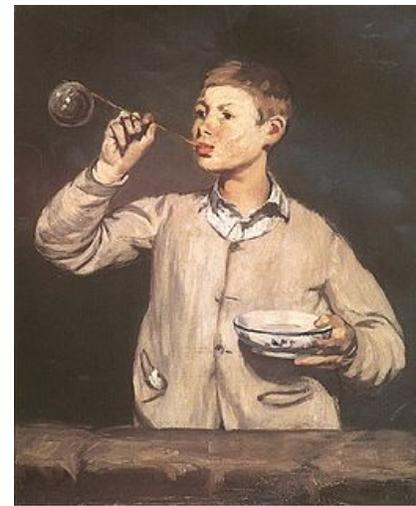
[http://dm.unife.it/matematicainsieme/schiume/perc\\_fisica04.htm](http://dm.unife.it/matematicainsieme/schiume/perc_fisica04.htm)

## A PROPOSITO DEL SAPONE...

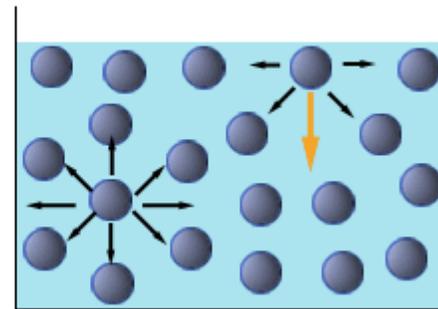
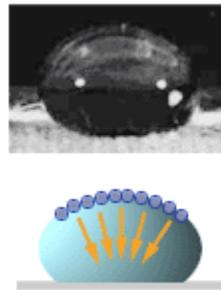


- Perché un ago galleggia se poggiato delicatamente sull'acqua?
- Perché alcuni insetti camminano sull'acqua?
- Perché l'acqua si raccoglie in grosse gocce su di una superficie unta e forma invece un film aderente su di una superficie pulita?
- Perché un tessuto asciuga bene l'acqua mentre un altro sembra rifiutarla?
- Perché l'acqua risale lungo un tubicino sottile?

# LA TENSIONE SUPERFICIALE



Le **forze di coesione** che agiscono fra le molecole dell'acqua, come mostra l'immagine, non hanno effetto sulle molecole che si trovano all'interno del liquido: esse infatti sono circondate da altre molecole quindi sono tirate in tutte le direzioni con forze di uguale intensità.



Le molecole che si trovano sulla superficie, invece, sono attratte solo verso il basso. Si forma allora una *pellicola elastica* che riesce a sorreggere corpi leggeri.

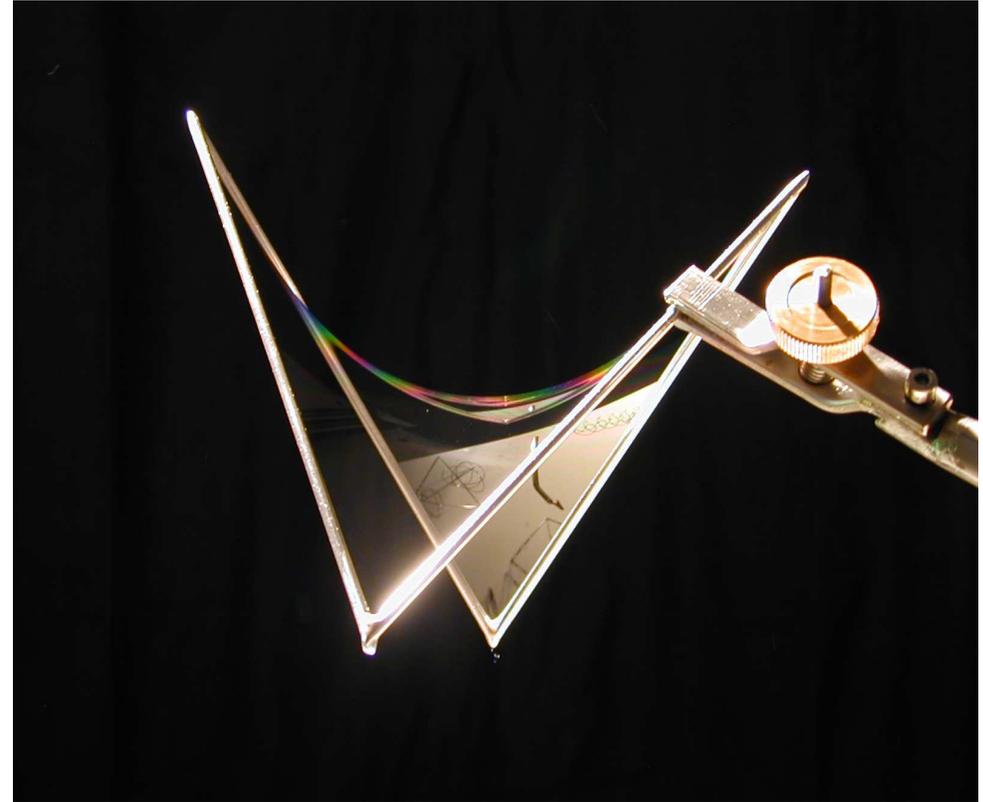
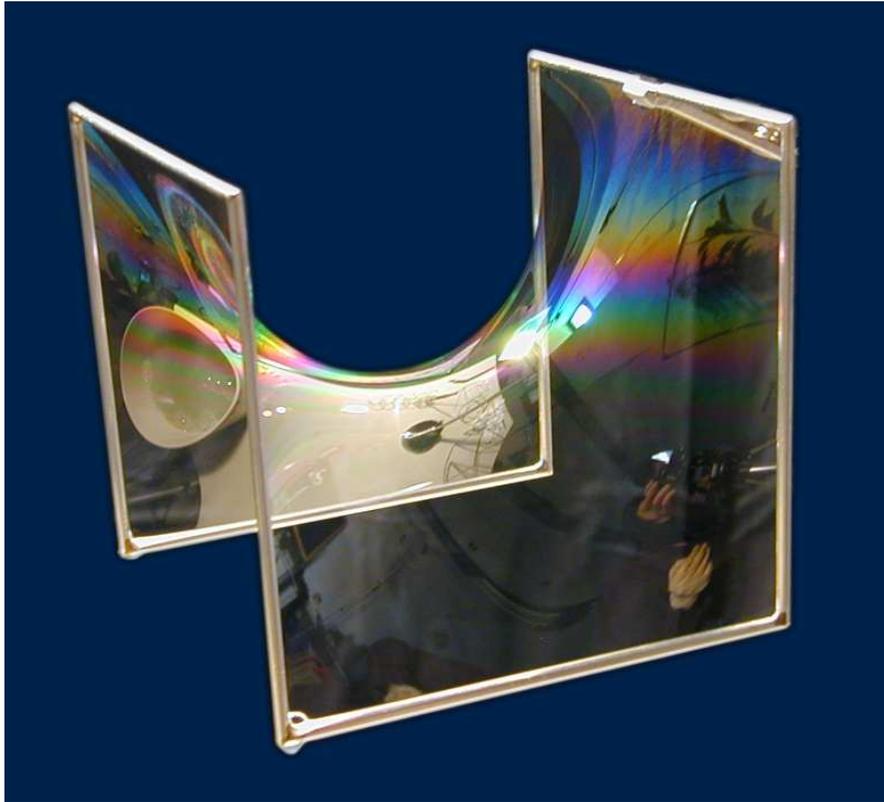
La forza che crea tale pellicola prende il nome di **tensione superficiale**.

Le bolle di sapone sono bolle d'aria racchiuse da una sottilissima pellicola di acqua saponata. Questa pellicola, dovuta alla tensione superficiale, si comporta in modo simile ad un palloncino di gomma.

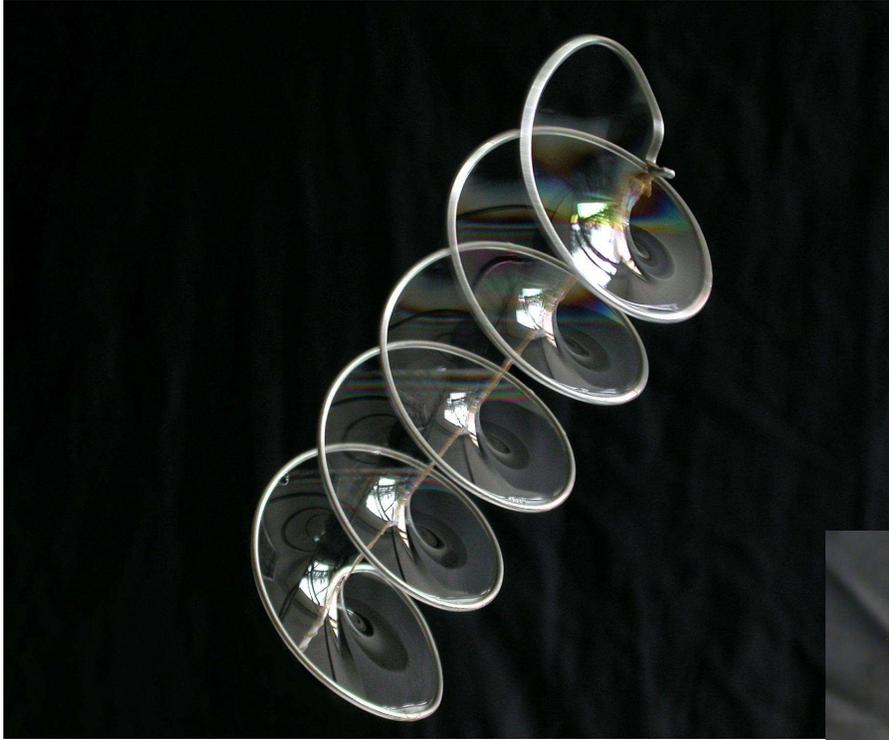
Ed ora...

via con gli **ESPERIMENTI!!**

# LA SELLA



# L'ELICOIDE

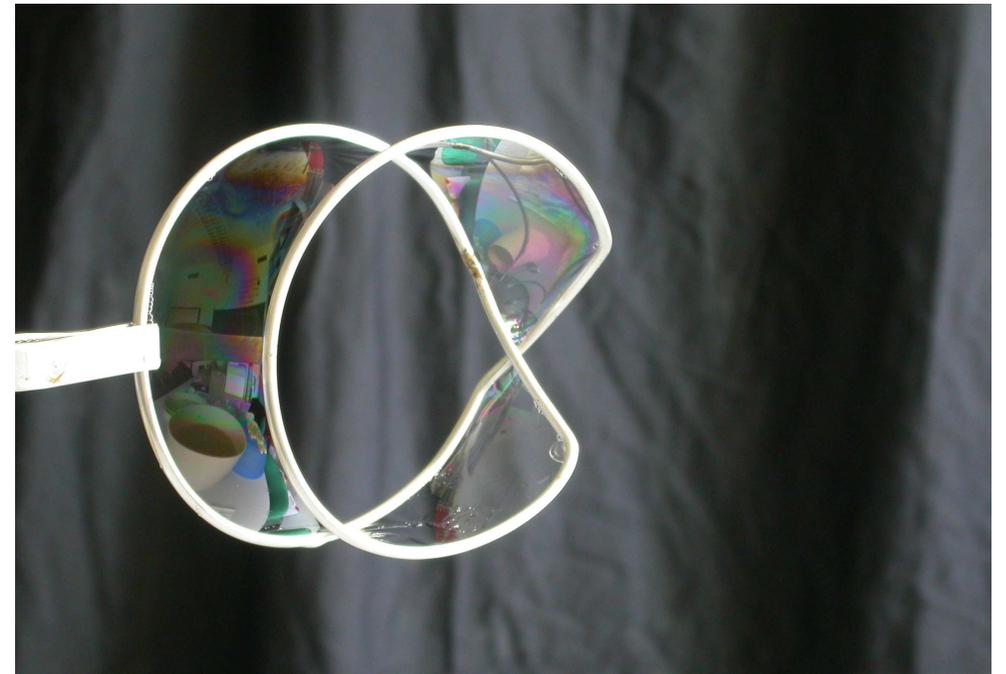
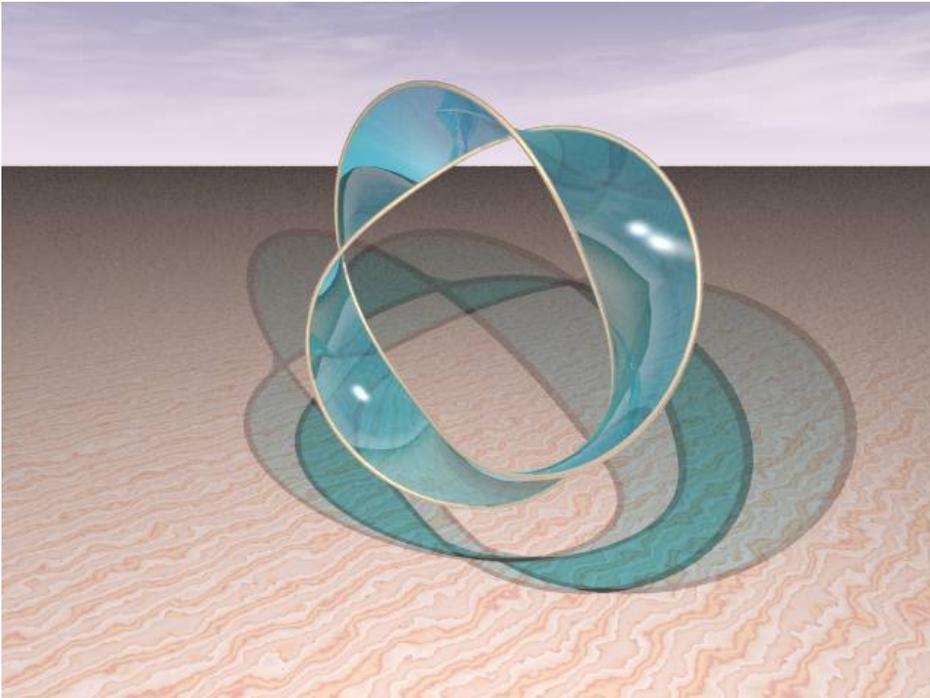


# LA CATENOIDE

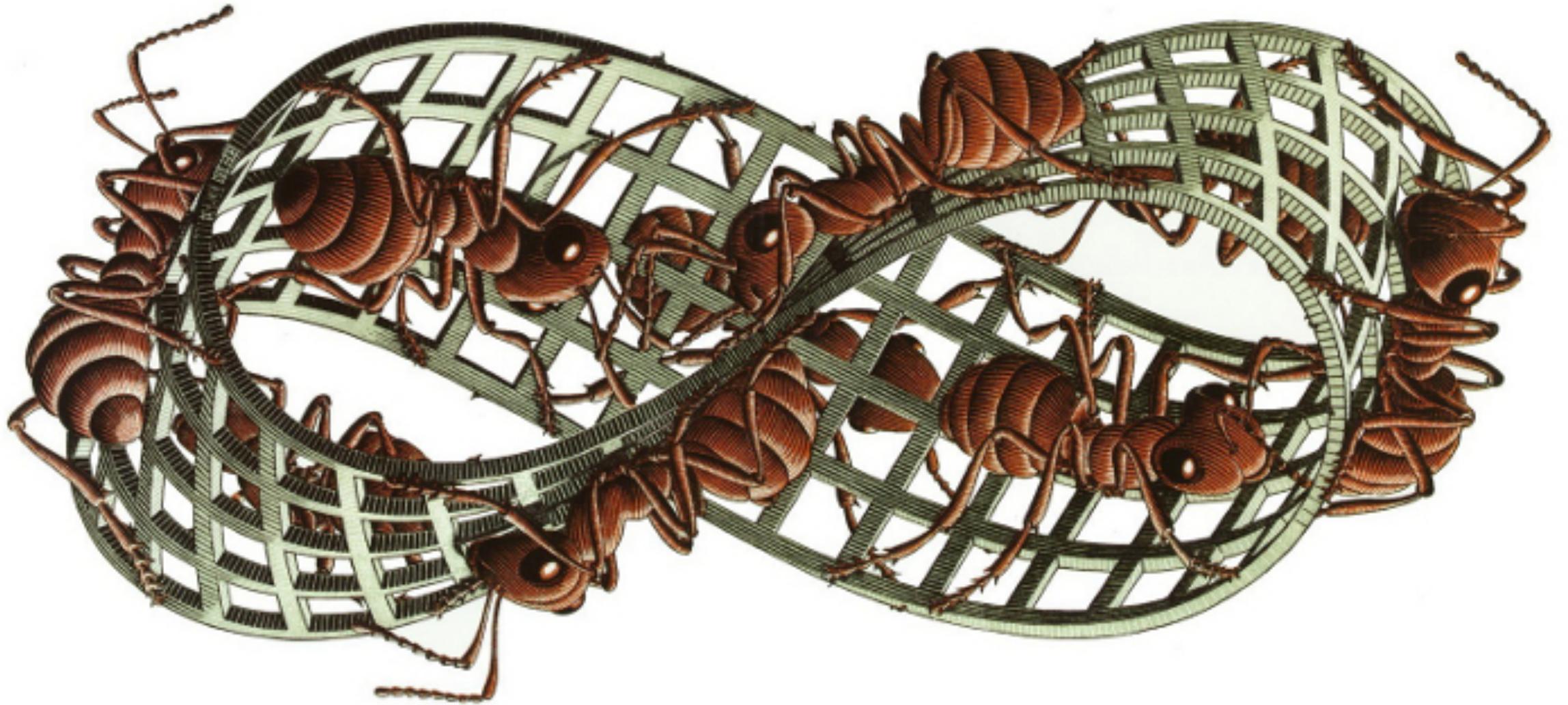


# IL NASTRO DI MOEBIUS

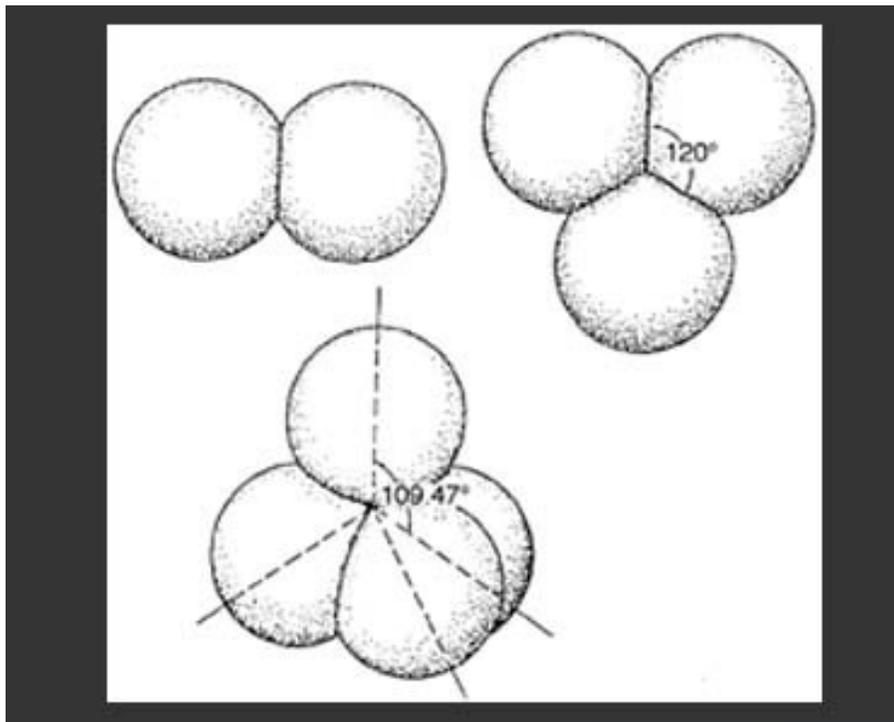
Le lamine di sapone non sono necessariamente orientabili:  
scegliendo opportuni contorni metallici (curve chiuse nello spazio), è facile ottenere come superficie minima un nastro di Moebius, che è una superficie ad una sola faccia!



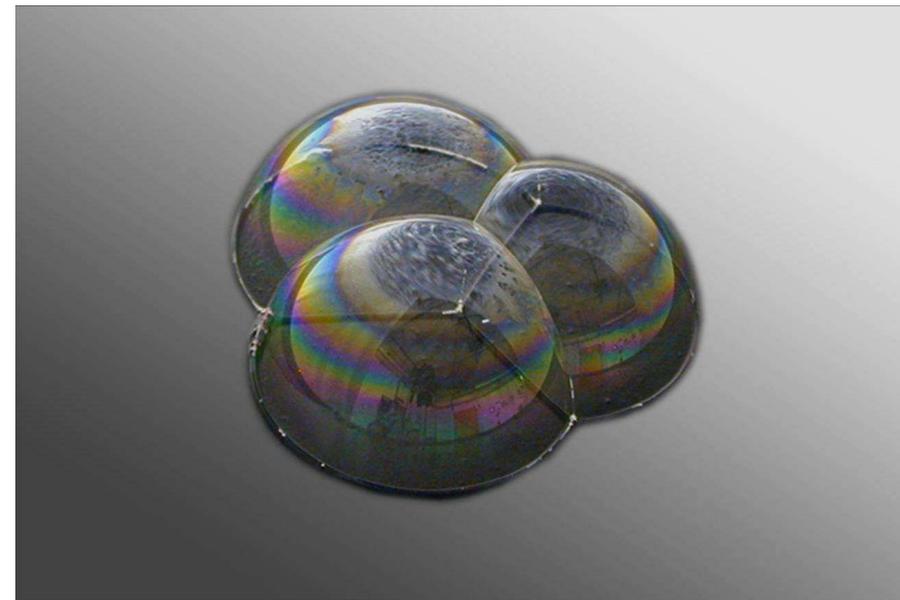
# IL NASTRO DI MOEBIUS



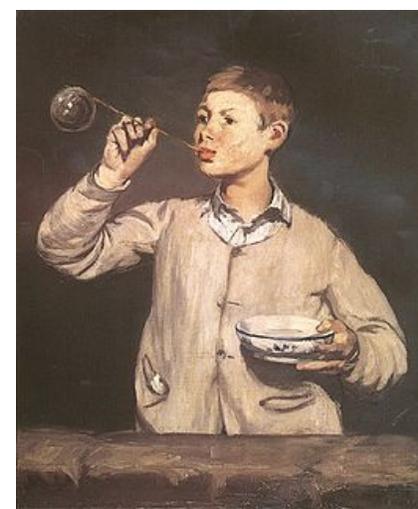




CHE COSA ABBIAMO OSSERVATO?



## CHE COSA ABBIAMO OSSERVATO?



- Le bolle di sapone risolvono un problema di minimo dell'area: la sfera è infatti la superficie chiusa di area minima tra tutte quelle che racchiudono un volume fissato (proprietà isoperimetrica della sfera).
- Le lamine di sapone, a causa della tensione superficiale, cercano di minimizzare l'area: precisamente, hanno area minima tra tutte le superfici che hanno come bordo il contorno metallico che abbiamo scelto.
- Tutte le lamine saponate che abbiamo ottenuto hanno in comune un'interessante proprietà geometrica: quando non sono piane, hanno un aspetto a sella.

Ciò significa che per ogni punto della superficie possiamo trovare due curve ortogonali che passano per il punto dato, giacciono sulla superficie e sono incurvate in senso opposto! In maniera rigorosa, si dice che le superfici di area minima hanno curvatura media nulla in ogni punto.

# CHE COSA ABBIAMO OSSERVATO?

Immergendo nell'acqua saponata lo scheletro di un tetraedro regolare, si ottiene un sistema di lamine di sapone costituito da facce triangolari, che si incontrano tre a tre formando angoli uguali di  $120^\circ$ .

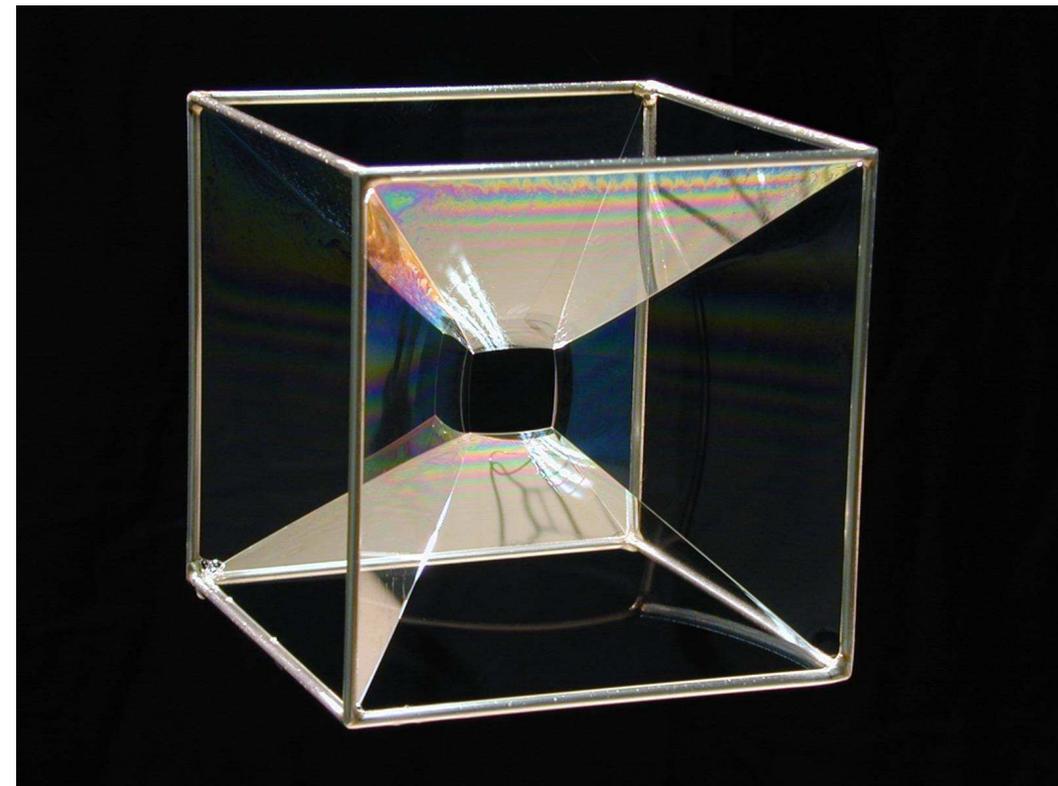
I 4 segmenti in cui le facce triangolari si incontrano vanno ulteriormente a convergere nel baricentro del tetraedro, formando angoli uguali tra loro che misurano circa  $109^\circ 28' 16''$ .



## CHE COSA ABBIAMO OSSERVATO?

Si formano tredici lamine tutte delimitate da uno spigolo del cubo eccetto una, che si incontrano a gruppi di tre lungo dodici spigoli liquidi. A ben guardare tale sistema rispetta le regole degli angoli e le lamine che si staccano dal reticolo metallico vanno a incontrarsi all'interno su una lamina piatta "quadrata" centrale, lamina che risulta essere disposta parallelamente a due facce opposte del telaio cubico.

Ad un primo sguardo le linee di intersezione che si formano all'interno del cubo, compresi i lati della pellicola al centro, potrebbero sembrare dei segmenti di retta. In realtà sono tutte incurvate e questo accade perché altrimenti verrebbero violate le leggi sugli angoli!



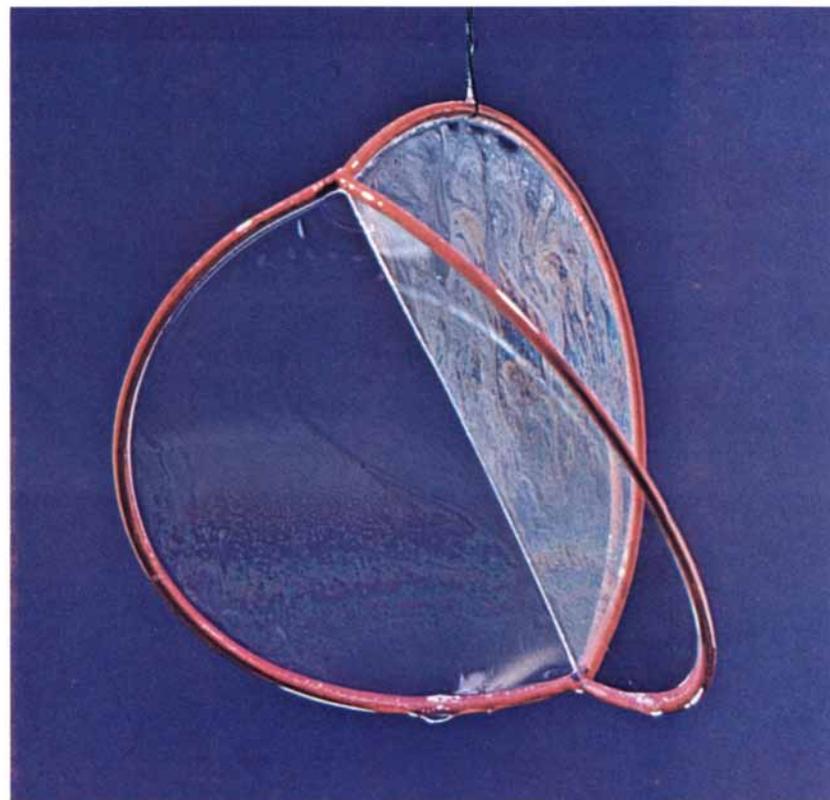
## LA PALLA DA TENNIS



## LA CUFFIA



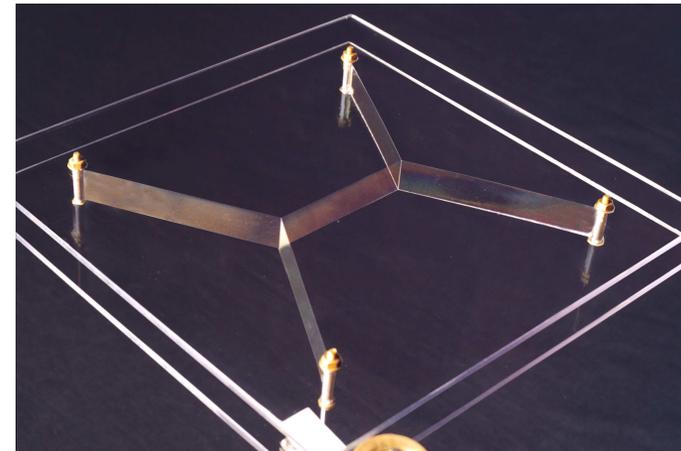
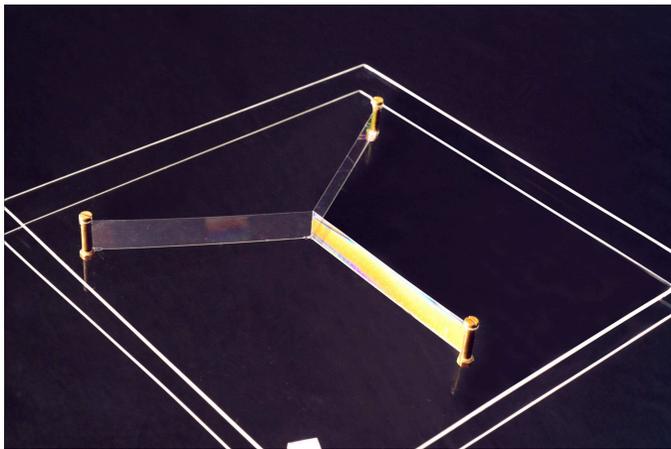
# ALTRE SUPERFICI



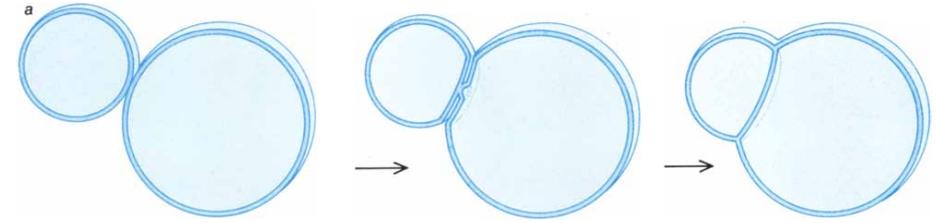
# CHE COSA ABBIAMO OSSERVATO?

Realizzando opportuni telaietti di plexiglass, le lamine saponate sanno anche trovare la rete di lunghezza minima che connette un sistema finito di punti del piano.

Abbiamo verificato sperimentalmente che in una rete minima i lati si possono incontrare solo due a due o tre a tre e che in ogni caso non si possono ottenere angoli più piccoli di  $120^\circ$  (in particolare, quando i lati che si incontrano sono 3, gli angoli sono di  $120^\circ$ ).



# LE LEGGI DI PLATEAU (1873)



Plateau studiò due problemi: come si intersecano tra loro le bolle di sapone e quali angoli formano.

Se si soffia nell'acqua saponata e si formano delle bolle, se due o più bolle si toccano tra loro, immediatamente si formano delle pareti piatte tra le diverse bolle che perdono il perfetto aspetto sferico. Stessa cosa accade quando laviamo i piatti con il sapone liquido. Si formano migliaia di lamine saponate, ognuna delle quali contiene dell'aria intrappolata.

Per anni Plateau sperimentò e descrisse gli angoli che le lamine formano finché arrivò a stabilire quelle che si chiamano le *leggi di Plateau* per le lamine di sapone.

- 1) Le lamine si incontrano a gruppi di tre lungo una curva formando a due a due angoli di  $120^\circ$ . Le curve di intersezione delle lamine sono dette spigoli liquidi.
- 2) Gli spigoli liquidi si incontrano a gruppi di quattro formando a due a due un angolo di  $109^\circ 28' 16''$ .

# MATEMATICA VS FISICA: 1-0

Le leggi di Plateau sono state dimostrate in modo rigoroso da Jean Taylor solo nel 1973.



<http://sites.math.rutgers.edu/~taylor/>

# L'ARTE DELLE BOLLE DI SAPONE

E' abbastanza naturale che tra i primi ad essere attratti dalle iridescenti lamine saponate siano stati gli artisti, i pittori in particolare. Naturalmente per l'esistenza delle bolle di sapone come *effetto collaterale* bisognava che il sapor come lo conosciamo noi fosse abbastanza diffuso. Nel Seicento lo era almeno in alcune parti d'Europa. Si cominciarono a vedere bambini che giocavano con le bolle. La prima immagine è molto probabilmente degli inizi del Cinquecento, la più famosa è però di Goltzius, fine Cinquecento. Titolo "Homo Bulla", la fragilità della vita, l'inutilità delle ambizioni.



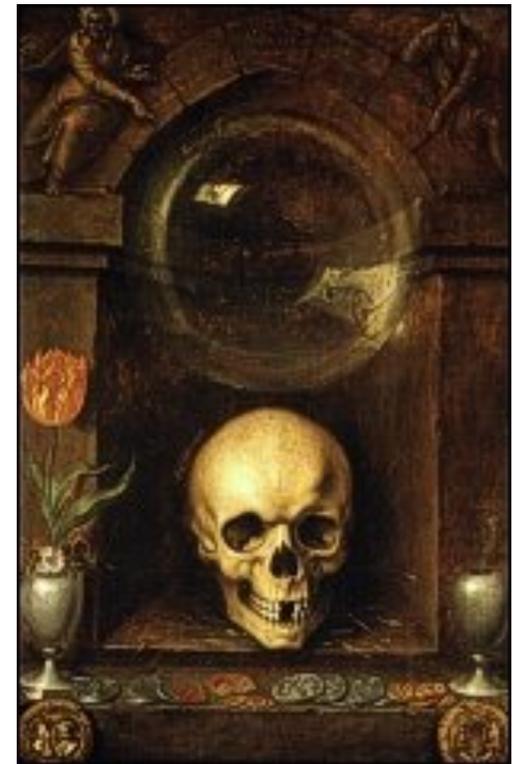
H. Goltzius, "Quis evadet?", 1594

# L'ARTE DELLE BOLLE DI SAPONE

E sono moltissimi i dipinti in Olanda, Germania e nei paesi vicini in cui si vedono le bolle di sapone.



*Scuola olandese, Bambini che fanno le bolle di sapone, XVI secolo*



*Jacques de Gheyn the Elder, Vanitas Still Life, 1603*

# L'ARTE DELLE BOLLE DI SAPONE

E sono moltissimi i dipinti in Olanda, Germania e nei paesi vicini in cui si vedono le bolle di sapone.



*Jean-Baptiste Siméon Chardin,  
"Le bolle di sapone o Ragazzo  
che fa le bolle di sapone" (1734)*



*Eduard Manet,  
"Ragazzo che soffia le bolle di sapone" (1867)*

# L'ARTE DELLE BOLLE DI SAPONE

E più recentemente...



*Charles Chaplin (1889-1977), Bolle di sapone*



*Wassily Kandinsky, Varios Circulos (1923)*

# L'ARCHITETTURA DELLE BOLLE DI SAPONE

## *Amicizia*

Amicizia: Bolla di sapone  
iridescente apparenza  
da fragili contorni. Più durevole il soffio  
così ampia la sfera,  
pervasa d'istante vissuti insieme.

Un attimo ...

e nulla più.

Ancora sapone  
nella vaschetta,  
ancora fiato  
nell'anima.

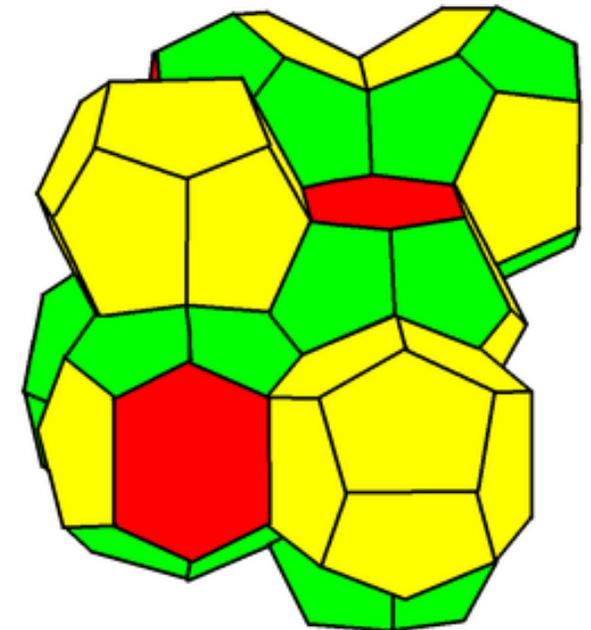


Frei Otto (1925-2015)

# L'ARCHITETTURA DELLE BOLLE DI SAPONE

Lord Kelvin pose un problema al quale cercò di dare una soluzione che sapeva non essere la migliore possibile. Si chiese come lo spazio potesse essere suddiviso in celle di eguale volume con la minima area superficiale tra le singole celle, in altre parole quale fosse la forma migliore di una schiuma di bolle.

Weaire e Phelan, due chimici fisici irlandesi, dimostrarono che la congettura di Kelvin non era corretta, che si poteva costruire una soluzione migliore di quella proposta da Kelvin. Era il 1993. La struttura di Weaire-Phelan utilizza due tipi di celle di eguale volume, un dodecaedro pentagonale irregolare e un tetrakaidecahedron con due esagoni e 12 pentagoni.



# L'ARCHITETTURA DELLE BOLLE DI SAPONE



PTW, Piscina Olimpica di Pechino, 2008

“Utilizzando la schiuma di Earle e Phelan come base per la struttura del Watercube, l’edificio è costruito utilizzando un elevato grado di ripetibilità. Usa soltanto tre facce differenti, quattro spigoli differenti e tre nodi o angoli diversi. Così il Centro Acquatico nazionale di Beijing può essere facilmente costruito utilizzando, organicamente e in modo ripetitivo, lo spazio basandosi su una soluzione di uno dei quesiti matematici più significativi, che si ritrova anche in natura, una soluzione verde, sociale e tecnica”.



## LA LETTERATURA DELLE BOLLE DI SAPONE



Dalle Metamorfosi di Ovidio (43 a.C. – 18): *Intumuit sic, ut pluvio perlucida coelo surgere bulla solet...*

(Si gonfiò così, come una bolla trasparente nel cielo piovoso...)

Dagli Epigrammi di Marziale (40-103): *Crassior offensae bulla tumescit aquae.*

(Ha più sostanza una bolla che si rigonfia nell'acqua agitata)

E' attribuito ad Erasmo da Rotterdam (1466/69-1536) il seguente aforisma: *L'uomo è come una bolla.*

Francis Bacon (1561-1626) inizia il suo poema sulla *Vita* con le parole:  
*The World's a bubble, and the life of Man less than a span.*

(Il mondo è una bolla, e la vita dell'uomo meno di una spanna)

# LA LETTERATURA DELLE BOLLE DI SAPONE



Nel 1857 Charles Baudelaire (1821-1867) pubblicò la prima edizione delle *Fleurs du mal*. La poesia CXVII è intitolata *L'Amour et le Crâne* con sottotitolo *Vieux Cul-de-lampe*. Motivo ispiratore della poesia è l'incisione di Goltzius:

L'Amour est assis sur le crâne  
De l'Humanité,  
Et sur ce trône le profane,  
Au rire effronté,

Souffle gaiement des bulles rondes  
Qui montent dans l'air,  
Comme pour rejoindre les mondes  
Au fond de l'éther.

Le globe lumineux et frêle  
Prend un grand essor,  
Crève et crache son âme grêle  
Comme un songe d'or.

J'entends le crâne à chaque bulle  
Prier et gémir :  
- " Ce jeu féroce et ridicule,  
Quand doit-il finir ?

Car ce que ta bouche cruelle  
Eparpille en l'air,  
Monstre assassin, c'est ma cervelle,  
Mon sang et ma chair ! "



# LA LETTERATURA DELLE BOLLE DI SAPONE

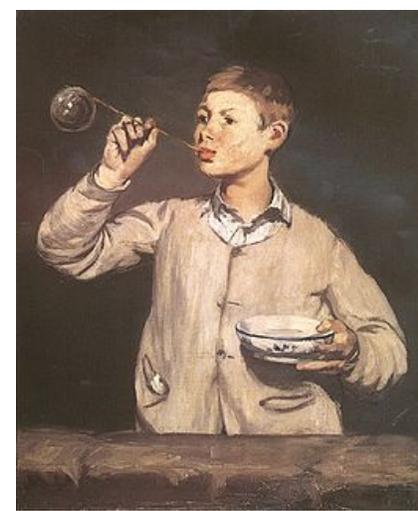


Traduzione de *L'Amour et le Crâne* di Baudelaire:

L'Amore siede sul cranio della  
Umanità e da quel trono il profano, con sfrontato riso,  
Soffia gioioso tonde bolle che si innalzano  
nell'aria quasi a raggiungere  
i mondi in fondo all'etere. Si slancia  
fragile il globo luminoso, e scoppia;  
sputa la sua anima  
gracile come un sogno d'oro.  
Odo il cranio ad ogni bolla pregare e gemere:  
"Questo gioco ridicolo  
e feroce avrà fine un giorno? Infatti  
quello che la tua bocca crudele  
sparge nell'aria, mostro assassino,  
è il mio cervello, il mio sangue, la mia carne!"



# LA LETTERATURA DELLE BOLLE DI SAPONE



*La bolla di sapone (1877)*

La bolla  
spunta a poco a poco  
dalla cannuccia,  
di arrotonda  
cresce  
si colora.  
Poi riflette la finestra,  
i vasi di fiori,  
il cielo.

*Gabriele D'Annunzio*

*Da I viaggi di Giovannino Perdigiorno (1973)*

Giovannino Perditempo,  
viaggiando in carrozzone,  
capitò nel paese degli uomini di sapone.  
Gli uomini di sapone  
e le loro signore  
sono sempre puliti  
e mandano un buon odore.  
Sono bolle di sapone  
le loro parole  
...

*Gianni Rodari*

# LA LETTERATURA DELLE BOLLE DI SAPONE



## *Bolla de Sapone*

Lo sai ched'è la Bolla de Sapone?  
L'astuccio trasparente d'un sospiro.  
Uscita da la canna vola in giro,  
sballottolata senza direzione,  
pe' fasse cunnolà come se sia  
dall'aria stessa che la porta via.  
Una farfalla bianca, un certo giorno,  
ner vede quela palla cristallina  
che rispecchiava come una vetrina  
tutta la robba che ciaveva intorno,  
j'agnede incontro e la chiamò: – Sorella,  
fammete rimirà! Quanto sei bella!

Er cielo, er mare, l'arberi, li fiori  
pare che t'accompagnino ner volo:  
e inentre rubbi, in un momento solo,  
tutte le luci e tutti li colori,  
te godi er monno e te ne vai tranquilla  
ner sole che sbrilluccica e sfavilla.  
La Bolla de Sapone je rispose:  
– So' bella, sì, ma duro troppo poco.  
La vita mia, che nasce per un gioco  
come la maggior parte delle cose,  
sta chiusa in una goccia... Tutto quanto  
finisce in una lagrima de pianto.

*Trilussa*

## LE BOLLE DI SAPONE: SOLO UN GIOCO?



“ ... Credo che non ci sia nessuno in questa stanza che non abbia fatto qualche volta una comune bolla di sapone, e che, ammirandone la forma perfetta e la meravigliosa lucentezza dei colori, non si sia chiesto come fosse possibile fare tanto facilmente un oggetto così splendido ... in una comune bolla di sapone c'è molto di più di quanto immagini di solito chi si limita a considerarla un gioco.”

Charles Vernon Boys, Le bolle di sapone e le forze che le modellano, Zanichelli (1963)