LEGGE DI GAUSS

e

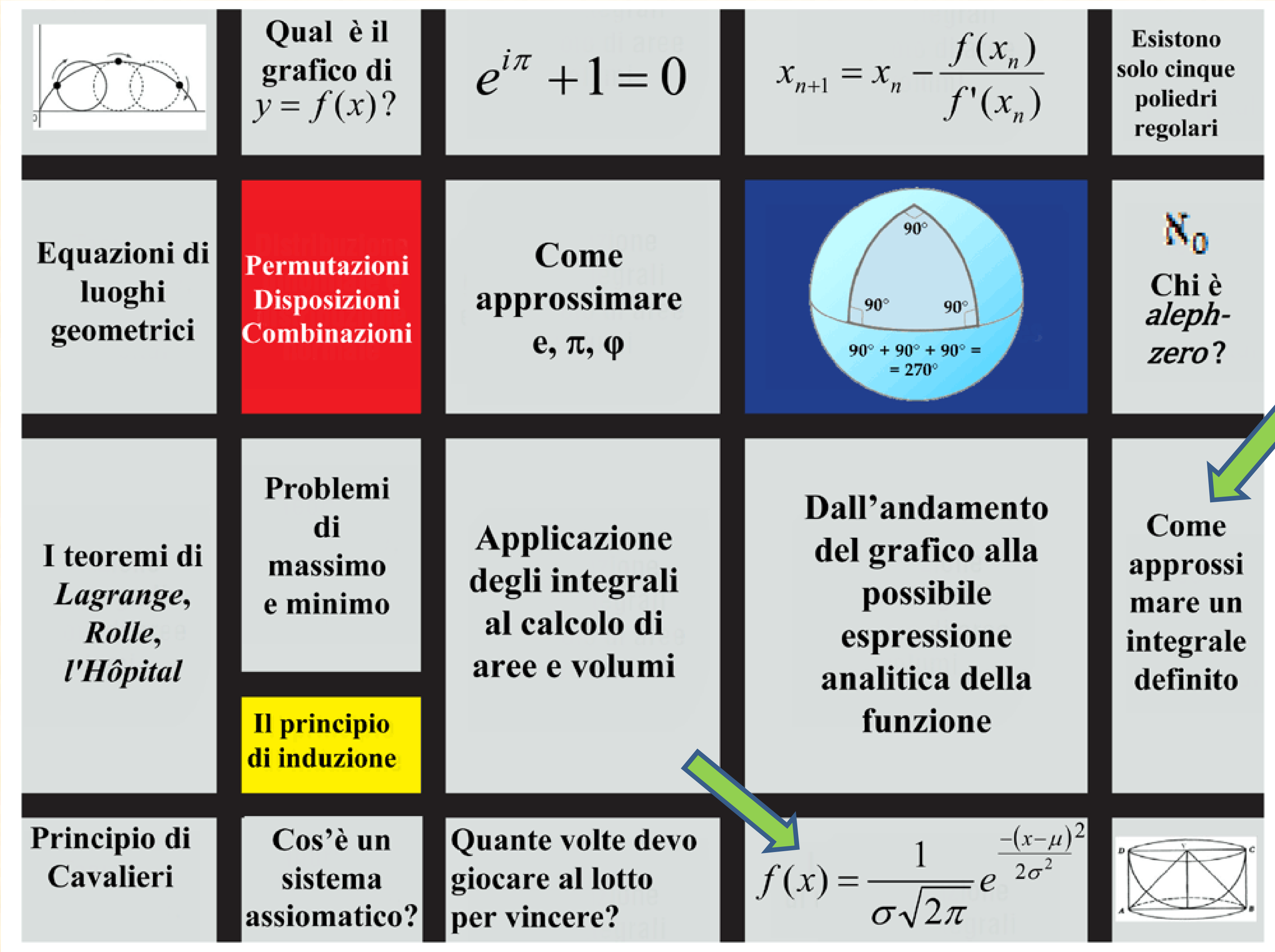
METODO MONTECARLO

Aniello (Nello) Buonocore
e
Luigia (Igia) Caputo

Laboratorio di Calcolo Combinatorio e Probabilità

Piano Lauree Scientifiche - Napoli

La Tavola degli Apprendimenti quinto anno LS
LA TAVOLA DI MONDRIAN



FUNZIONE DI GAUSS

Sessione suppletiva 2014
Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE
Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

<u>QUESITO n.7 DEL QUESTIONARIO</u>

Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana delimitata dalla curva γ di equazione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

e dall'asse delle x nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$.

FUNZIONE DI GAUSS

Si tratta evidentemente del calcolo di un integrale definito (su un intervallo limitato) nel quale la funzione integranda, ovvero la funzione (di densità di probabilità) gaussiana standard, non possiede una primitiva composta mediante funzione elementari. Dopo di ciò, posto

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy,$$

si richiede di approssimare $I = F(1) - F(-1)$.

È noto che sia la funzione f che la funzione F (la funzione di distribuzione) individuano in maniera univoca la legge di probabilità gaussiana (o normale) standard.

FUNZIONE DI GAUSS

La funzione di distribuzione normale standard differisce dalla "funzione degli errori" (appartenente alla classe delle funzioni speciali)

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2}\, dy$$

solo per traslazione e omotetia:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

È abbastanza agevole dimostrare che la funzione erf è una funzione dispari e questo consente di ottenere:

$$I = F(1) - F(-1) = \mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

FUNZIONE DI GAUSS

Prescindendo dalla richiesta (*Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati …*) si può ottenere un'approssimazione troncando in maniera opportuna lo sviluppo in serie di potenze della funzione degli errori:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

Indicato con Z un numero aleatorio con legge normale standard ($Z \sim N(0,1)$), in definitiva si ha:

$$I = F(1) - F(-1) \equiv \mathbb{P}(|Z| < 1) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[1 - \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{10 \cdot 4} - \frac{1}{42 \cdot 8} + \frac{1}{216 \cdot 16} - \cdots\right].$$

FUNZIONE DI GAUSS

Con ovvio significato dei simboli:

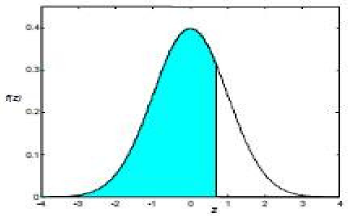
$$I_1 \cong 0{,}797885;$$
$$I_2 \cong 0{,}664904;$$
$$I_3 \cong 0{,}684851;$$
$$I_4 \cong 0{,}682476;$$
$$I_5 \cong 0{,}682707;$$
$$I_6 \cong 0{,}682688;$$
$$I_7 \cong 0{,}682690;$$
$$I_8 \cong 0{,}682689;$$
$$I_9 \cong 0{,}682689.$$

FUNZIONE DI GAUSS

Della funzione *F* si riporta una tabella nell'appendice di tutti i testi di Statistica applicata.

Tavola 3 – Distribuzione normale standardizzata

La tavola fornisce il valore dell'area sottesa dalla distribuzione normale standardizzata $f(z)$, tra $-\infty$ e z



0,707107

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	[illegible]	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	[illegible]	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	[illegible]	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	[illegible]	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	[illegible]	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	[illegible]	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319

FUNZIONE DI GAUSS

Da essa si evince che

$$F(0) = 0{,}5 \quad \text{e} \quad F(1) \cong 0{,}8413$$

da cui

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \cong 0{,}3413$$

e, data la simmetria della funzione di Gauss rispetto all'asse verticale, anche che:

$$I \cong 0{,}6826.$$

METODO MONTE CARLO

Un'approssimazione numerica all'integrale richiesto può essere ottenuta con l'applicazione del metodo Monte Carlo.

Nel 1949, Nicholas C. Metropolis e Stanislaw Ulam pubblicarono sul Journal of the American Statistical Association un articolo dal titolo "The Monte Carlo Method".

Nell'Unione Sovietica, i primi articoli sul metodo Monte Carlo furono pubblicati nel 1955 e nel 1956 da V. V. Chavchanidze, Yu A. Schreider e V. S. Vladimirov.

METODO MONTE CARLO

Schema di un metodo Monte Carlo

1. Una quantità μ deve essere determinata con un'assegnata precisione ε.
2. Bisogna individuare un numero aleatorio X con i seguenti requisiti: (i) è osservabile un numero indefinito di volte; (ii) $\mathbb{D}^2(X) = \sigma^2 < +\infty$; (iii) $\mathbb{E}(X) = \mu$.
3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, per la media aritmetica $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ di n osservazioni indipendenti del numero X risulta:

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu \qquad \text{e} \qquad \mathbb{D}^2(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

METODO MONTE CARLO

Schema di un metodo Monte Carlo

4. La legge forte dei grandi numeri garantisce che:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\text{q.c.}} \mu.$$

4. Il Teorema di Laplace asserisce che, qualunque sia la legge di probabilità della variabile, si ha:

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma} \xrightarrow{L} Z \sim N(0,1)\ .$$

6. Risulta:

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n-\mu| < \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right) \cong \mathbb{P}(|Z|<3) = \operatorname{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\cong 0{,}997.$$

METODO MONTE CARLO

Schema di un metodo Monte Carlo

7. Si determina n imponendo la condizione della precisione richiesta:

$$\frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon \Longrightarrow n \geq \frac{9\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Si osservi che la varianza σ^2 di X è importante esclusivamente al fine di determinare il numero n degli addendi che consente di ottenere la precisione richiesta. Di solito essa non è nota a priori per cui viene sovrastimata prima di procedere al calcolo di μ, utilizzando ad esempio, lo stimatore della varianza campionaria: $S^2{}_m = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X}_m)^2$.

METODO MONTE CARLO

Monte Carlo per il Calcolo di un Integrale Definito

Con f funzione continua nell'intervallo (a, b), è richiesto di approssimare, con precisone ε, la quantità

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

A tale scopo, si indichi con U il numero aleatorio con legge di probabilità uniforme nell'intervallo (a, b): in altri termini, la funzione di densità di probabilità di U è

$$g(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{se } a < u < b; \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

METODO MONTE CARLO

Monte Carlo per il Calcolo di un Integrale Definito

Il numero aleatorio

$$X = \frac{f(U)}{g(U)}$$

ha le proprietà richieste nel precedente punto 2. In particolare:

$$\mathbb{E}_g(X) := \int_a^b \frac{f(u)}{g(u)} g(u)\, du = \int_a^b f(u)\, du = I,$$

$$\mathbb{E}_g(X^2) := \int_a^b \left[\frac{f(u)}{g(u)}\right]^2 g(u)\, du = (b-a)\int_a^b f^2(u)\, du$$
$$< +\infty \Rightarrow \sigma^2 = \mathbb{D}^2{}_g(X) < +\infty.$$

METODO MONTE CARLO

<u>Monte Carlo per il Calcolo di un Integrale Definito</u>

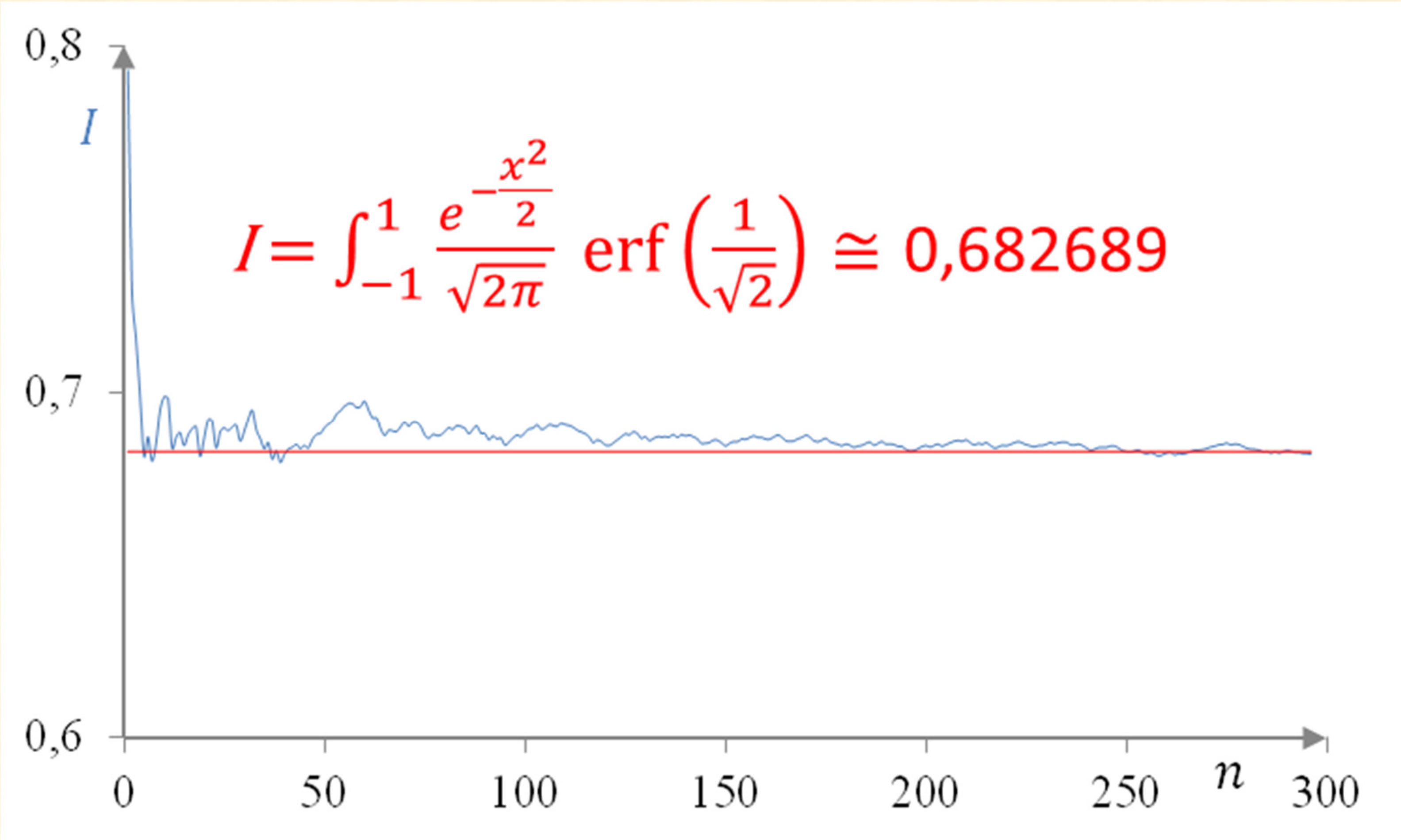
Quindi dopo aver (sovra) stimato σ^2 e scelto $n \geq \frac{9\hat{\sigma}^2}{\varepsilon^2}$ si ha:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(u_i)}{g(u_i)} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,.$$

La formula precedente assomiglia ad una formula di quadratura con pesi $w_i = (b-a)/n$ uguali tra loro. La differenza risiede nel fatto che in essa i nodi u_i sono scelti a "caso". È necessario quindi aver a disposizione un dispositivo fisico, una tabella oppure un generatore di numeri uniformi (una formula!) che li fornisca.

METODO MONTE CARLO

Monte Carlo per il Calcolo di un Integrale Definito



METODO MONTE CARLO

Monte Carlo per il Calcolo di un Integrale Definito

Lo svantaggio principale del metodo Monte Carlo risiede nella formula che fornisce il numero degli addendi: ad esempio per $\varepsilon = 0{,}01$ dovrà essere $n \geq 90000 \cdot \widehat{\sigma}^2$.

Per tale motivo risulta importante individuare il numero aleatorio X che oltre ad avere la media uguale alla quantità da determinare ha varianza "piccola". Nel caso del calcolo di un integrale definito bisogna individuare la funzione di densità di probabilità che ha un andamento il più possibile simile alla funzione integranda.

Questa tecnica è nota in letteratura come "ad importanza".

METODO MONTE CARLO

Monte Carlo per il Calcolo di un Integrale Definito

Per contrasto, il vantaggio principale del metodo di Monte Carlo è il fatto che esso può essere utilizzato per il calcolo di integrali multidimensionali

$$I = \int_{(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_m,b_m)}^{b} f(x_1, \cdots, x_m)\, dx_1 \cdots dx_m$$

$$\cong \frac{\prod_{j=1}^{m}\left(b_j - a_j\right)}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(u_{i,1}, \cdots, u_{i,m}\right)$$

e la taglia del campionamento è indipendente dalla dimensione del dominio di integrazione.

CONCLUSIONI

The education work in my Institute for Practical Mathematics (IPM) at the Darmstadt Institute of Technology is characterized by four principles:

1. *Synthesis of pure and applied mathematics.*
2. *Bringing into relief and exhausting the basic ideas. That means: The student shall understand the simple fundamentals, and he shall work as much as possible by them.*
3. *Intuitive obviousness.*
4. *Exercises are more important than lectures.*

Alwin Walther

CONCLUSIONI

According to 2. and 3., mathematics is appearing as concentrated common sense. It is learned not only by logical reasoning but also by eyes and hands. Therefore we demonstrate frequently the mathematical notions and methods by experiments and models.

EXPERIMENT AND MODEL FOR THE MONTE CARLO METHOD

Alwin Walter

Institut für Praktische Mathematik - Technische Hockschule Darmstadt

Symposium on Monte Carlo Methods held at the University of Florida, Conducted by the Statistical Laboratory,…, March, 16 and 17, 1954 (Méthode de Monte Carlo)

L’articolo descrive un metodo Monte Carlo per il calcolo di un integrale definito realizzato con dee della fortuna e gettoni contenuti in due scatole … e successivamente per mezzo di un dispositivo elettronico appositamente realizzato.