Il laboratorio è strutturato in quattro incontri destinati a studenti di III, IV e V anno di liceo scientifico.

I) Il primo incontro si apre con una chiacchierata sulle origini della nozione di frattale, nonché sulle questioni matematiche e sulle applicazioni che tali oggetti permettono di affrontare. Dopo aver fornito definizioni intuitive di frattale ed autosimilarità, si sottolinea che, per poter costruire un frattale, occorre conoscere e saper utilizzare trasformazioni geometriche elementari. Per semplicità si lavora nel piano. Vengono, quindi, proposti alcuni esercizi che permettono agli studenti di prendere confidenza con traslazioni, ometetie, rotazioni e riconoscere gli invarianti di tali trasformazioni. Partendo da quelle assegnate si chiede agli studenti di desumere l'espressione generale di una trasformazione affine nel piano e riuscire a distinguerne la tipologia in base ai valori dei coefficienti. Ovviamente l'incontro potrebbe procedere con un approfondimento sulle trasformazioni affini e sulle loro proprietà.

Di seguito vengono riportati gli esercizi proposti agli studenti.

ESERCIZIO n. 1 (2015)

Sia data la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} X &= x+1 \\ Y &= y. \end{cases}$$

i) Come si trasforma il triangolo di vertici (-1,0), (0,1), (0,-1)?

ii) Si conservano area, perimetro, angoli?

ESERCIZIO n. 2 (2015)

Sia data la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} X &= x \\ Y &= y-2. \end{cases}$$

i) Come si trasforma il triangolo di vertici (-1,0), (0,1), (0,-1)?

ii) Si conservano area, perimetro, angoli?

ESERCIZIO n. 3 (2015)

Sia data la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} X &= x+1 \\ Y &= y-2. \end{cases}$$

i) Come si trasforma il triangolo di vertici (-1,0), (0,1), (0,-1)?

ii) Si conservano area, perimetro, angoli?

iii) Come si chiama questa trasformazione? Come si può scrivere la legge generale?

ESERCIZIO n. 4 (2015)

Sia data la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} X &= \dfrac{x}{2} \\ Y &= \dfrac{y}{2}. \end{cases}$$

i) Come si trasforma il triangolo di vertici (-1,0), (0,1), (0,-1)?

ii) Si conservano area, perimetro, angoli?

ESERCIZIO n. 5 (2015)

Sia data la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} X &= 2x \\ Y &= 2y. \end{cases}$$

i) Come si trasforma il triangolo di vertici (-1,0), (0,1), (0,-1)?

ii) Si conservano area, perimetro, angoli?

ESERCIZIO n. 6 (2015)

Sia data la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} X &= -2x \\ Y &= -2y. \end{cases}$$

i) Come si trasforma il triangolo di vertici (-1,0), (0,1), (0,-1)?

ii) Si conservano area, perimetro, angoli?

iii) Come si può scrivere la legge generale? Come si trasformano area e perimetro?

ESERCIZIO n. 7 (2015)

Si considerino i due quadrati Q e Q' (vedi Figura 1).

i) Esiste una trasformazione che porta Q in Q'? Se esiste, come può essere scritta?

ii) Si conservano area, perimetro, angoli?

ESERCIZIO n. 8 (2015)

Si considerino i due triangoli T e T' (vedi Figura 2).

i) Esiste una trasformazione che porta T in T'? Se esiste, come può essere scritta?

ii) Si conservano area, perimetro, angoli?

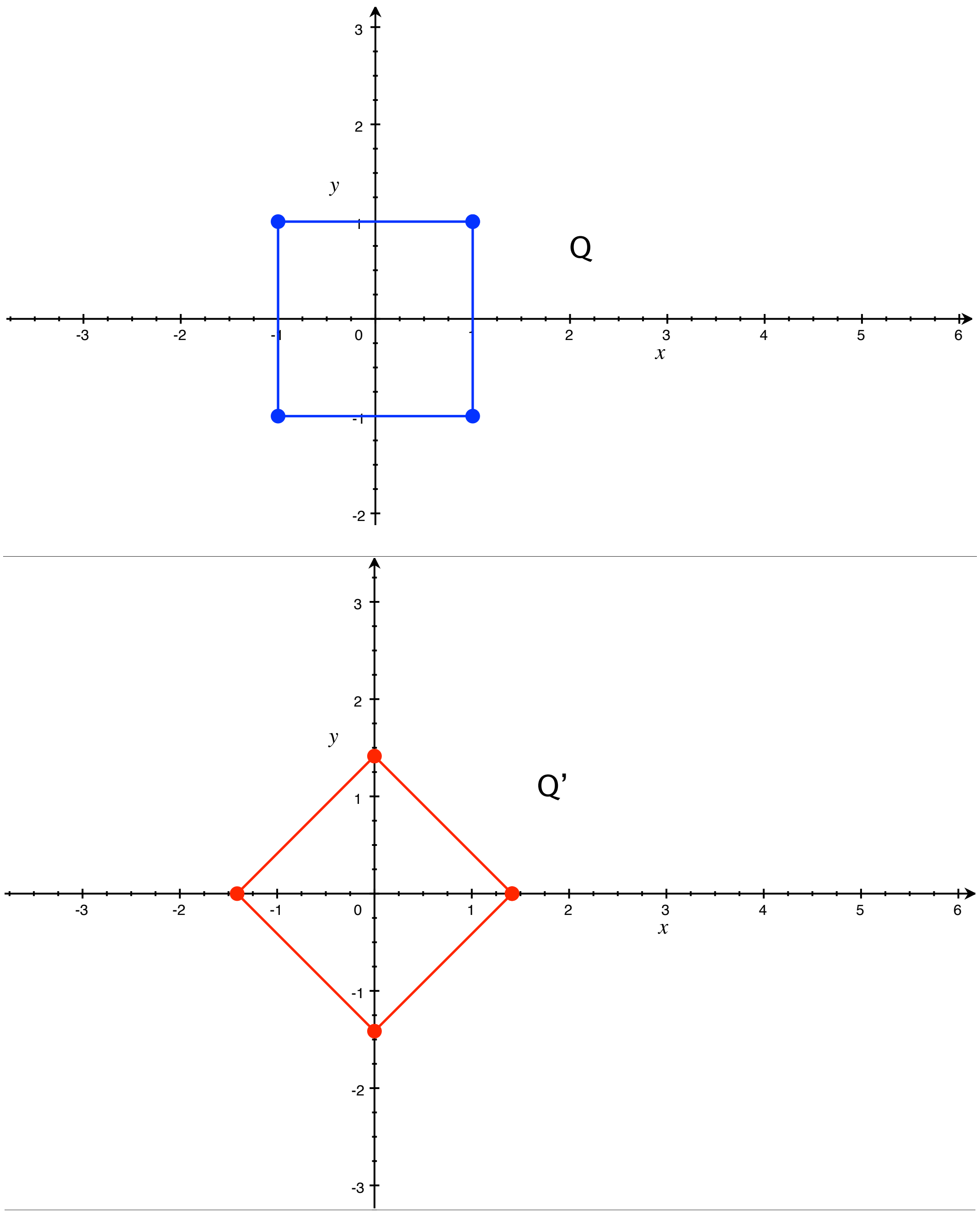


Figura 1: vedi esercizio 7.

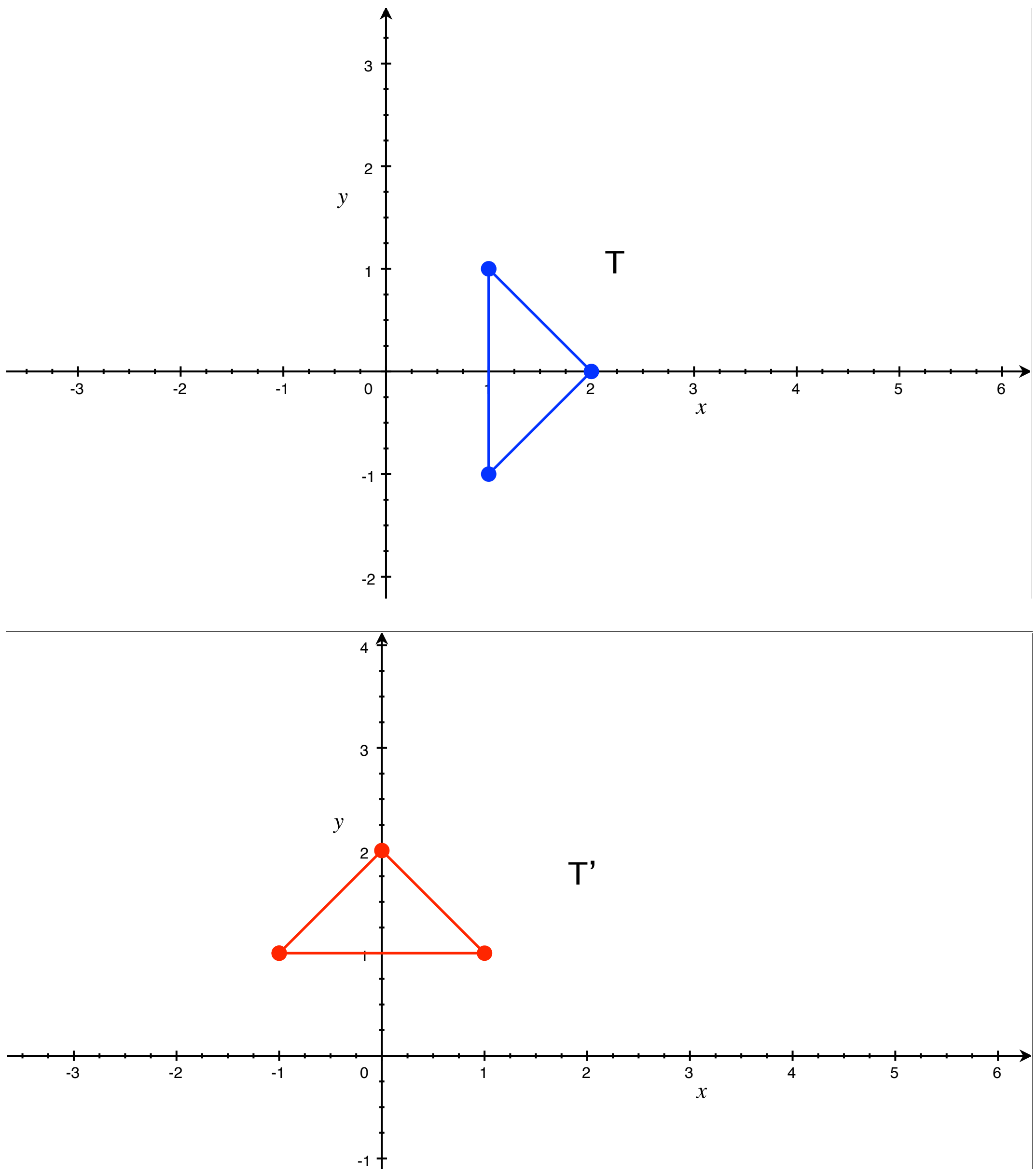


Figura 2: vedi esercizio 8.

II) Il secondo incontro è dedicato alla costruzione “a mano” di un frattale: la curva di von Koch. Attraverso esercizi mirati gli studenti vengono guidati nella costruzione della curva mediante l'uso di trasformazioni geometriche introdotte nel primo incontro. Si osserva poi che la costruzione non è unica e si riflette sul minimo numero di trasformazioni necessarie. Infine gli studenti si cimentano nel calcolo della lunghezza e dell'area della curva frattale. Ovviamente l'incontro potrebbe procedere con la costruzione di altri frattali, per esempio l'insieme di Cantor ed il tappeto di Sierpinski.

Di seguito vengono riportati gli esercizi proposti agli studenti.

ESERCIZIO n. 1 (2015)

i) Disegnare il segmento s di estremi (0,0) e $\left(\frac{1}{3},0\right)$ e determinare le coordinate degli estremi del segmento s' ottenuto ruotando s di 60 gradi in senso antiorario attorno all'origine.

ii) Unire ad s il segmento s'' ottenuto traslando s' di $\frac{1}{3}$ verso destra. Cosa si ottiene?

iii) Scrivere le trasformazioni geometriche coinvolte nei punti *i*) e *ii*).

ESERCIZIO n. 2 (2015)

i) Disegnare il segmento σ di estremi (0,0) e $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ e determinare le coordinate degli estremi del segmento σ' ottenuto ruotando σ di 60 gradi in senso orario attorno all'origine.

ii) Traslare σ di 1 verso destra e, successivamente, traslare σ' di $\frac{2}{3}$ verso destra. Unire i segmenti ottenuti. Cosa si ottiene?

iii) Scrivere le trasformazioni geometriche coinvolte nei punti *i*) e *ii*).

ESERCIZIO n. 3 (2015)

Unire le figure ottenute negli esercizi 1 e 2.

i) Quali e quante trasformazioni sono state usate?

ii) Le trasformazioni usate sono le uniche possibili?

ESERCIZIO n. 4 (2015)

Assegnate le trasformazioni

$$T_1 : \begin{cases} X = \frac{1}{3}\,x \\ Y = \frac{1}{3}\,y \end{cases} \quad T_2 : \begin{cases} X = \frac{1}{6}\,x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}\,y \end{cases} \quad T_3 : \begin{cases} X = -\frac{1}{6}\,x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{2}{3} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{6}\,y \end{cases} \quad T_4 : \begin{cases} X = \frac{1}{3}\,x + \frac{2}{3} \\ Y = \frac{1}{3}\,y \end{cases}$$

i) riconoscere le trasformazioni elementari che intervengono nelle $T_1, ..., T_4$.

ii) Applicare le trasformazioni $T_1, ..., T_4$ al segmento di estremi $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Disegnare i segmenti risultanti nello stesso sistema di riferimento. Cosa si ottiene?

ESERCIZIO n. 5 (2015): Costruzione della curva di von Koch

Passo 0. Disegnare il segmento k di estremi (0,0) e (1,0).

Passo 1. Dividere k in tre segmenti di uguale lunghezza individuando le coordinate degli estremi di tali segmenti.

Passo 2. Costruire un triangolo equilatero avente come base il segmento centrale, contenuto nel primo quadrante, individuando le coordinate dei suoi vertici.

Passo 3. Rimuovere la base del triangolo.

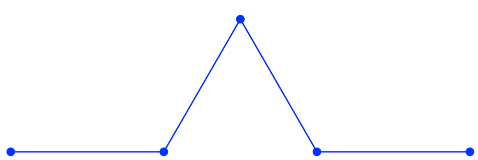
Passo 4. Ripetere i tre passi precedenti partendo dal segmento k' di estremi (0,0) e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Che relazione intercorre tra la curva costruita al Passo 3 e quella costruita al Passo 4?

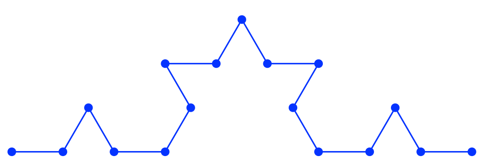
ESERCIZIO n. 6 (2015)

Calcolare la lunghezza delle seguenti spezzate considerate per costruire la curva di von Koch:

$L_0 =$ ....



$L_1 =$ ....



$L_2 =$ ....

Quanto varrà L_3?

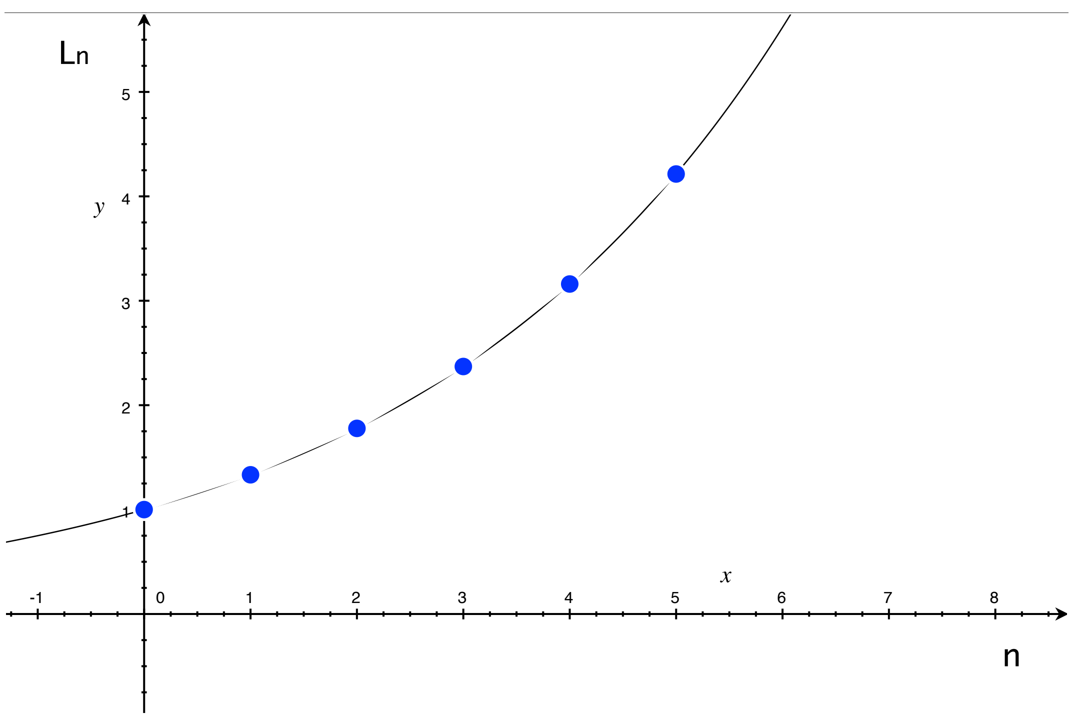
ESERCIZIO n. 7 (2015)

Riempire la seguente tabella:

n	lunghezza di un segmento	numero di segmenti	L_n
0			
1			
2			
3			
...			
n			

Osservazioni sulla lunghezza della curva di von Koch

Dal grafico riportato in figura si deduce immediatamente che al crescere del numero di iterazioni n cresce la lunghezza L_n della spezzata



e, per rendere questi conti concreti, basta notare che se $L_0 = 1$ metro, allora

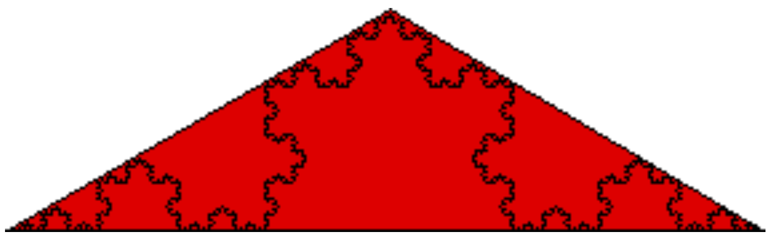
$L_{24} = 1$ Km, $L_{128} = 1$ anno luce!!!

ESERCIZIO n. 8 (2015)

Nessuno si stupisce davanti all'affermazione: un segmento ha area zero. Che succede per una curva "frastagliata" come quella di von Koch?

Si supponga di calcolare l'area della curva di von Koch ricoprendola con triangoli isosceli via via più piccoli.

i) Se si parte con un segmento di lunghezza 1, quanto vale la prima approssimazione A_0 dell'area?



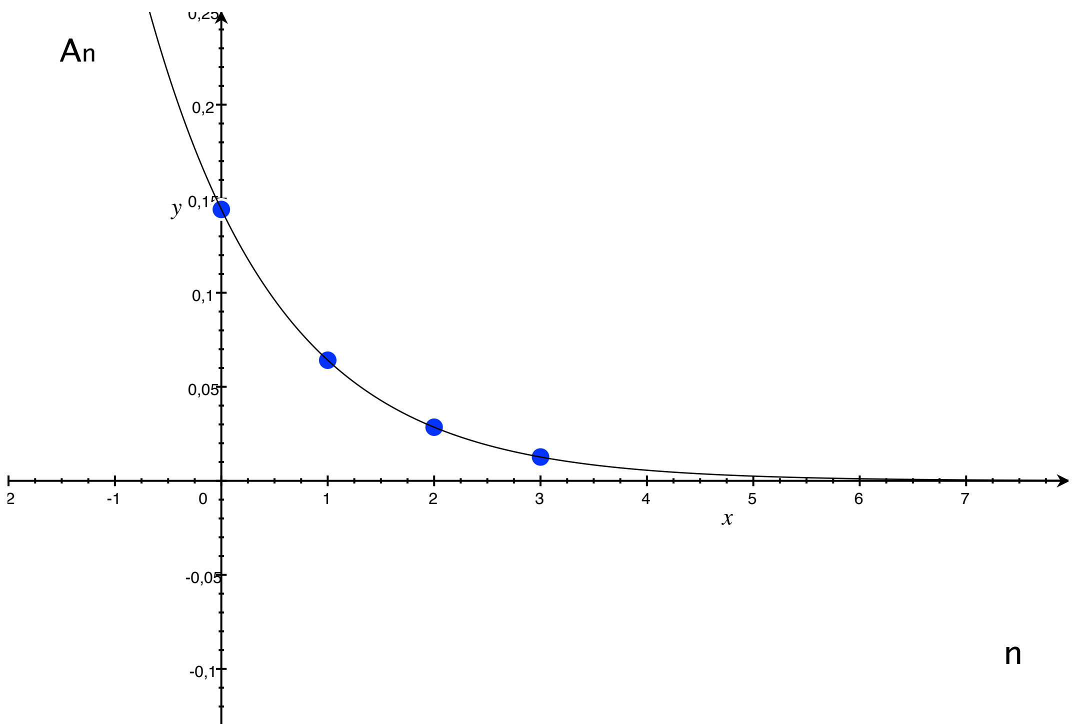
ii) E la seconda approssimazione A_1?

iii) E la terza approssimazione A_2?

Osservazioni sull'area della curva di von Koch

n	area di un triangolo	numero di triangoli	A_n
0	$\frac{\sqrt{3}}{12}$	1	$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{12}$
1	$\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{1}{9}$	4	$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}\frac{4}{9}$
2	$\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1}{9}\right)^2$	$16 = 4^2$	$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}\frac{16}{81} = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^2$
...			
n	$\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1}{9}\right)^n$	4^n	$A_n = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n$

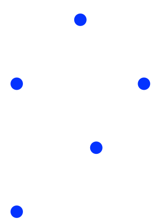
Dai dati riportati in tabella e dal grafico in figura si deduce immediatamente che anche nel caso della curva di von Koch l'area vale zero.



III) Il terzo incontro è dedicato alle nozioni di misura e dimensione. Ragionando sulle misure già note (0, 1, 2, 3-dimensionali) gli studenti scoprono, attraverso esercizi mirati, che esiste un'unica misura strettamente positiva, finita, di una figura geometrica regolare e che essa è legata alla dimensione della figura. Inoltre, essi scoprono che, se provano a misurare la figura in uno spazio di dimensione più piccola, la misura è infinita, mentre è zero se ci si mette in uno spazio di dimensione più grande. Tenuto conto di quanto osservato sulla lunghezza e sull'area della curva di von Koch nel secondo incontro, gli studenti sono guidati alla scoperta della dimensione frattale. Sono presentati altri esempi di frattali (anche attraverso l'ausilio del software GeoGebra) di cui viene calcolata la dimensione. L'incontro si conclude con un'introduzione alla misura di Hausdorff per chiarire agli studenti come si può calcolare la misura di un oggetto di dimensione non intera.

Di seguito vengono riportati gli esercizi proposti agli studenti.

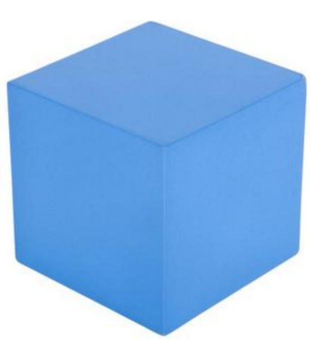
ESERCIZIO n. 1 (2015): Cosa intendiamo per misura di un insieme?



....

....

....



....

ESERCIZIO n. 2 (2015)

Con i dati raccolti nell'esercizio precedente si ottiene la seguente tabella:

Dimensione	Misura che conta i punti	Lunghezza	Area	Volume
0	>0	0	0	0
1	∞	>0	0	0
2	∞	∞	>0	0
3	∞	∞	∞	>0

Si osserva che esiste sempre un'unica misura finita, strettamente positiva. I valori delle altre misure sono zero o infinito.

In quali casi la misura vale zero?

In quali casi la misura vale infinito?

ESERCIZIO n. 3 (2015)

Dato un segmento di lunghezza 1, basta un segmento di lunghezza 1 per ricoprire completamente il segmento assegnato.

i) Quanti segmenti di lunghezza $\frac{1}{2}$ servono per ricoprire completamente il segmento?

ii) Quanti segmenti di lunghezza $\frac{1}{3}$ servono per ricoprire completamente il segmento?

iii) Quanti segmenti di lunghezza $\frac{1}{6}$ servono per ricoprire completamente il segmento?

iv) Quanti segmenti di lunghezza $\frac{1}{k}$ servono per ricoprire completamente il segmento?

ESERCIZIO n. 4 (2015)

Dato un quadrato di lato 1, basta un quadrato di lato 1 per ricoprire completamente il quadrato assegnato.

i) Quanti quadrati di lato $\frac{1}{2}$ servono per ricoprire completamente il quadrato?

ii) Quanti quadrati di lato $\frac{1}{3}$ servono per ricoprire completamente il quadrato?

iii) Quanti quadrati di lato $\frac{1}{6}$ servono per ricoprire completamente il quadrato?

iv) Quanti quadrati di lato $\frac{1}{k}$ servono per ricoprire completamente il quadrato?

ESERCIZIO n. 5 (2015)

Dato un cubo di spigolo 1, basta un cubo di spigolo 1 per ricoprire completamente il cubo assegnato.

i) Quanti cubi di spigolo $\frac{1}{2}$ servono per ricoprire completamente il cubo?

ii) Quanti cubi di spigolo $\frac{1}{3}$ servono per ricoprire completamente il cubo?

iii) Quanti cubi di spigolo $\frac{1}{6}$ servono per ricoprire completamente il cubo?

iv) Quanti cubi di spigolo $\frac{1}{k}$ servono per ricoprire completamente il cubo?

ESERCIZIO n. 6 (2015)

Assegnata la curva di von Koch γ,

i) quante curve ottenute da γ con un'omotetia di rapporto $\frac{1}{3}$ servono per ricoprire completamente γ?

i) Quante curve ottenute da γ con un'omotetia di rapporto $\frac{1}{9}$ servono per ricoprire completamente γ?

ii) Quante curve ottenute da γ con un'omotetia di rapporto $\frac{1}{3^n}$ servono per ricoprire completamente γ?

iii) Calcolare la dimensione di γ.

ESERCIZIO n. 7 (2015)

L'insieme di Cantor può essere costruito nel modo seguente.

Passo 0. Prendere un segmento di lunghezza 1.

Passo 1. Dividere il segmento in tre segmenti uguali.

Passo 2. Rimuovere il segmento centrale.

Passo 3. Ripetere i passi 1-2 su ogni nuovo segmento.

L'insieme di Cantor è l'insieme che si ottiene con infinite iterazioni, rimuovendo ad ogni passaggio solo il segmento centrale che si forma nella suddivisione di ciascun segmento in 3 segmenti più piccoli; dunque, in definitiva, l'insieme di Cantor è costituito dalla parte blu che rimane in figura, dopo infinite iterazioni.

Calcolare la dimensione dell'insieme di Cantor.

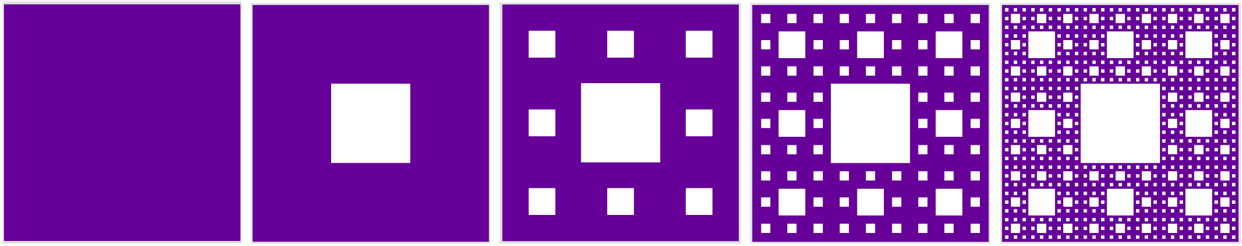
ESERCIZIO n. 8 (2015)

Il tappeto di Sierpinski può essere costruito nel modo seguente.

Passo 0. Prendere un quadrato di lato 1.

Passo 1. Dividere il quadrato in 9 quadrati più piccoli, ottenuti dividendo ogni lato in tre parti uguali.

Passo 2. Rimuovere il quadrato centrale.



Passo 3. Ripetere i passi 1-2 su ogni nuovo quadrato.

Il tappeto di Sierpinski è l'insieme che si ottiene con infinite iterazioni, rimuovendo ad ogni passaggio solo il quadrato centrale che si forma nella suddivisione di ciascun quadrato in 9 quadrati più piccoli; dunque, in definitiva, il tappeto di Sierpinski è costituito dalla parte viola che rimane in figura, dopo infinite iterazioni.

Calcolare la dimensione del tappeto di Sierpinski.

ESERCIZIO n. 9 (2015)

i) Scrivere i passi necessari per la costruzione della curva di Hilbert (vedi Figure 1-2 e supponi che il quadrato di partenza abbia lato 1).

ii) Calcolare la dimensione della curva di Hilbert.

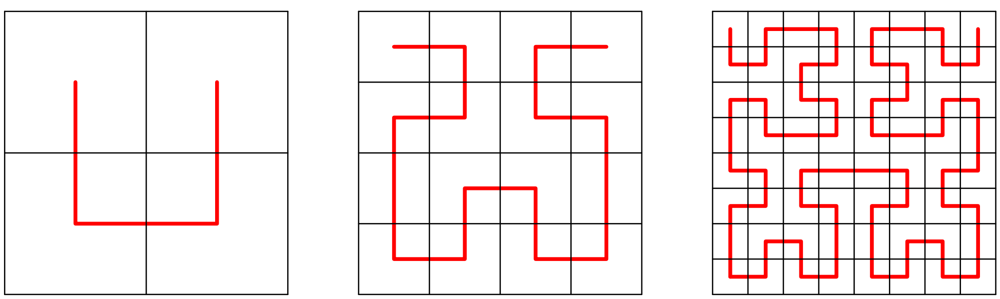


Figura 1: Le prime 3 iterazioni

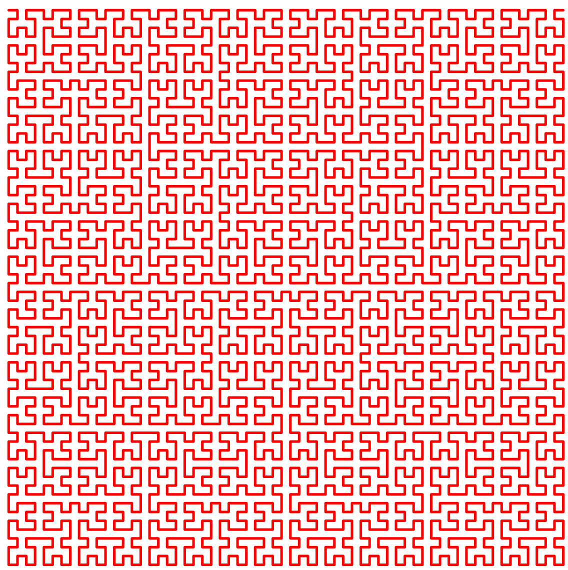


Figura 2: La curva di Hilbert

IV) Il quarto incontro è dedicato ancora al concetto di misura di un frattale. Poiché in generale non si riesce a calcolare la misura di Hausdorff d-dimensionale di un frattale di dimensione d non intera, gli studenti calcolano la misura in dimensione intera minore di d o maggiore di d. Per fare ciò occorre sommare una serie geometrica. Pertanto si introduce attraverso esempi elementari la nozione di serie geometrica e se ne calcola la somma. Vengono proposti vari esercizi per prendere confidenza con le serie geometriche e vederne varie applicazioni. Si calcolano quindi la lunghezza dell'insieme di Cantor e l'area del tappeto di Sierpinski. L'incontro si conclude con la proiezione di immagini e filmati che permettono agli studenti di riconoscere le proprietà dei frattali studiate durante il laboratorio: autosimilarità, dimensione non intera, indipendenza dalla forma iniziale.

Di seguito vengono riportati gli esercizi proposti agli studenti.

ESERCIZIO n. 1 (2015)

Assegnata la successione di numeri positivi

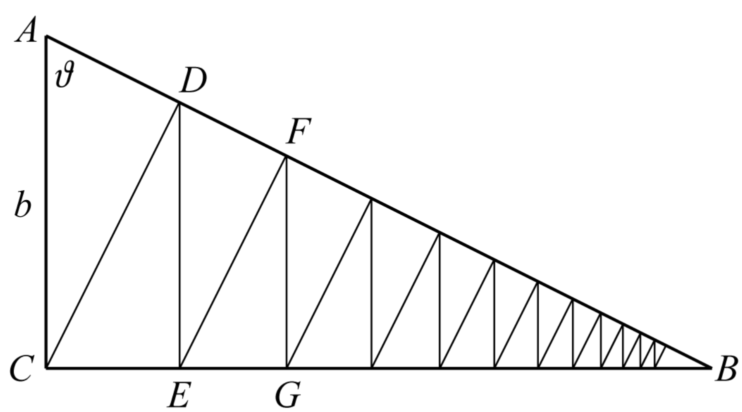
$$1,\ h,\ h^2,\ h^3, ...,\ h^n, ...$$

i) come si possono sommare tutti i numeri della successione al variare di h?

ii) Ci sono casi in cui la somma è finita?

ESERCIZIO n. 2 (2015)

Calcolare la lunghezza totale della spezzata disegnata in figura e che congiunge i punti C, D, E, F,... con $b = 1$ e $\vartheta = \frac{\pi}{3}$.



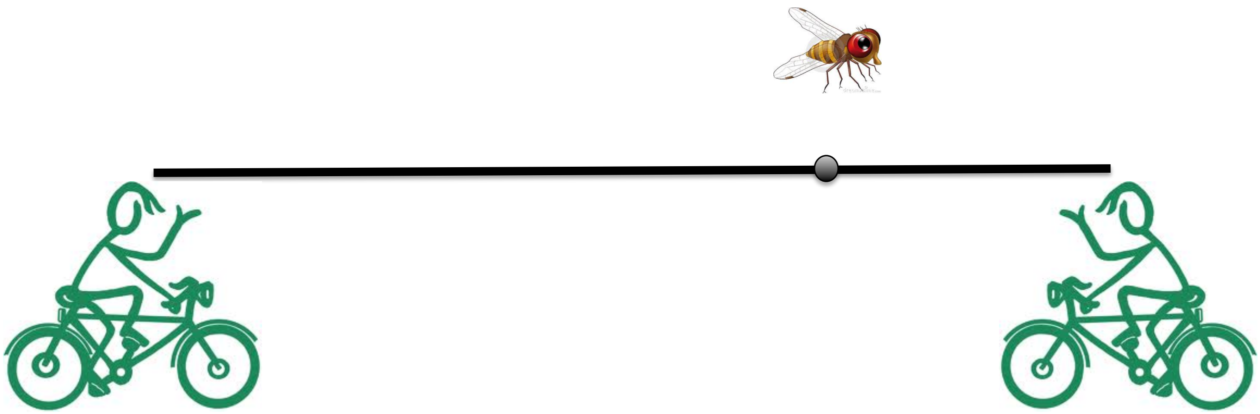
ESERCIZIO n. 3 (2015)

i) Scrivere la frazione generatrice di $3,\overline{24}$.

ii) Quanto vale $0,\overline{9}$?

ESERCIZIO n. 4 (2015)

Due ciclisti distanti tra loro 100 chilometri vogliono incontrarsi. Partono contemporaneamente e si muovono entrambi a 10 km/h. Nell'istante in cui i ciclisti partono una mosca lascia la prima bicicletta e vola verso la seconda a 20 km/h. Una volta giunta e posatasi sulla seconda bicicletta, riparte alla stessa velocità per tornare a posarsi sulla prima. La mosca continua a volare dall'una all'altra bicicletta finchè i due ciclisti si incontrano.



i) Verificare che ogni volta la mosca percorre $\frac{2}{3}$ della distanza tra le biciclette.

ii) Quanti chilometri ha percorso in totale la mosca?

ESERCIZIO n. 5 (2015)

Come visto nello scorso incontro, l'insieme di Cantor può essere costruito nel modo seguente.

<u>Passo 0</u>. Prendere un segmento di lunghezza 1.

<u>Passo 1</u>. Dividere il segmento in tre segmenti uguali.

<u>Passo 2</u>. Rimuovere il segmento centrale.

<u>Passo 3</u>. Ripetere i passi 1-2 su ogni nuovo segmento.

L'insieme di Cantor è l'insieme che si ottiene con infinite iterazioni, rimuovendo ad ogni passaggio solo il segmento centrale che si forma nella suddivisione di ciascun segmento in 3 segmenti più piccoli; dunque, in definitiva, l'insieme di Cantor è costituito dalla parte blu che rimane in figura, dopo infinite iterazioni.

i) Calcolare la lunghezza delle parti bianche dopo 1, 2, 3 iterazioni.

ii) Quanto vale la lunghezza dell'insieme di Cantor?

ESERCIZIO n. 6 (2015)

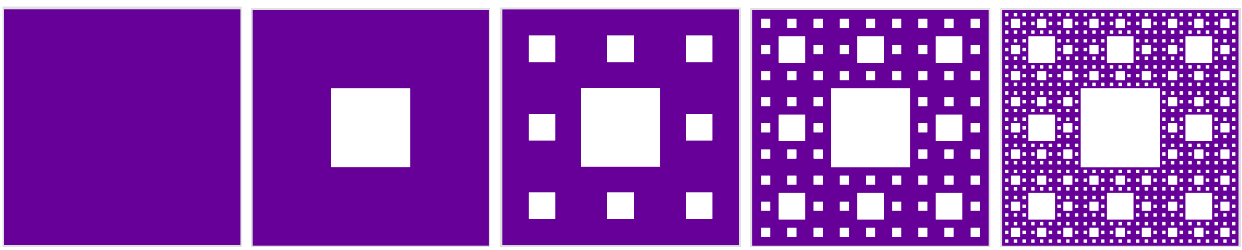
Come visto nello scorso incontro, il tappeto di Sierpinski può essere costruito nel modo seguente.

Passo 0. Prendere un quadrato di lato 1.

Passo 1. Dividere il quadrato in 9 quadrati più piccoli, ottenuti dividendo ogni lato in tre parti uguali.

Passo 2. Rimuovere il quadrato centrale.

Passo 3. Ripetere i passi 1-2 su ogni nuovo quadrato.



Il tappeto di Sierpinski è l'insieme che si ottiene con infinite iterazioni, rimuovendo ad ogni passaggio solo il quadrato centrale che si forma nella suddivisione di ciascun quadrato in 9 quadrati più piccoli; dunque, in definitiva, il tappeto di Sierpinski è costituito dalla parte viola che rimane in figura, dopo infinite iterazioni.

i) Calcolare l'area delle parti bianche dopo 1, 2, 3 iterazioni.

ii) Quanto vale l'area del tappeto?

Bibliografia e sitografia

- L. Ambrosio, N. Fusco & D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- M. Bramanti, C. D. Pagani & S. Salsa, *Analisi Matematica I*, Zanichelli editore, 2014.
- B. B. Mandelbrodt, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1982.
- H.-O. Peitgen, H. Jürgens & D. Saupe, *Fractals for the classroom. Part 1. Introduction to fractals and chaos*, Springer-Verlag, New York; National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1992.
- `http://classes.yale.edu/fractals/`
- `http://www.frattali.it`
- `http://mathworld.wolfram.com/topics/Fractals.html`