

Il laboratorio è strutturato in quattro incontri destinati a studenti di III e IV anno di scuola superiore.

I) Il primo incontro si apre con una chiacchierata sulle origini della nozione di frattale, nonché sulle questioni matematiche e sulle applicazioni che tali oggetti permettono di affrontare. Dopo aver fornito definizioni intuitive di frattale ed autosimilarità, si sottolinea che, per poter costruire un frattale, occorre conoscere e saper utilizzare trasformazioni geometriche elementari. Per semplicità si lavora nel piano. Vengono, quindi, proposti alcuni esercizi che permettono agli studenti di prendere confidenza con traslazioni, omotetie, rotazioni e riconoscere gli invarianti di tali trasformazioni. Partendo da quelle assegnate si chiede agli studenti di desumere l'espressione generale di una trasformazione affine nel piano e riuscire a distinguerne la tipologia in base ai valori dei coefficienti. Si procede quindi alla costruzione "a mano" di un frattale: la curva di von Koch. Attraverso esercizi mirati gli studenti vengono guidati nella costruzione della curva mediante l'uso di trasformazioni geometriche introdotte precedentemente. Si osserva poi che la costruzione non è unica e si riflette sul minimo numero di trasformazioni necessarie.

Di seguito vengono riportati gli esercizi proposti agli studenti.

### TRASFORMAZIONI AFFINI

$$\begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = dx + ey + f \end{cases} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

$$b = d = 0, a = e = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{TRASLAZIONE}$$

$$b = c = d = f = 0, a = e \quad \longrightarrow \quad \text{OMOTETIA}$$

$$c = f = 0, ae - bd = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{ROTAZIONE}$$

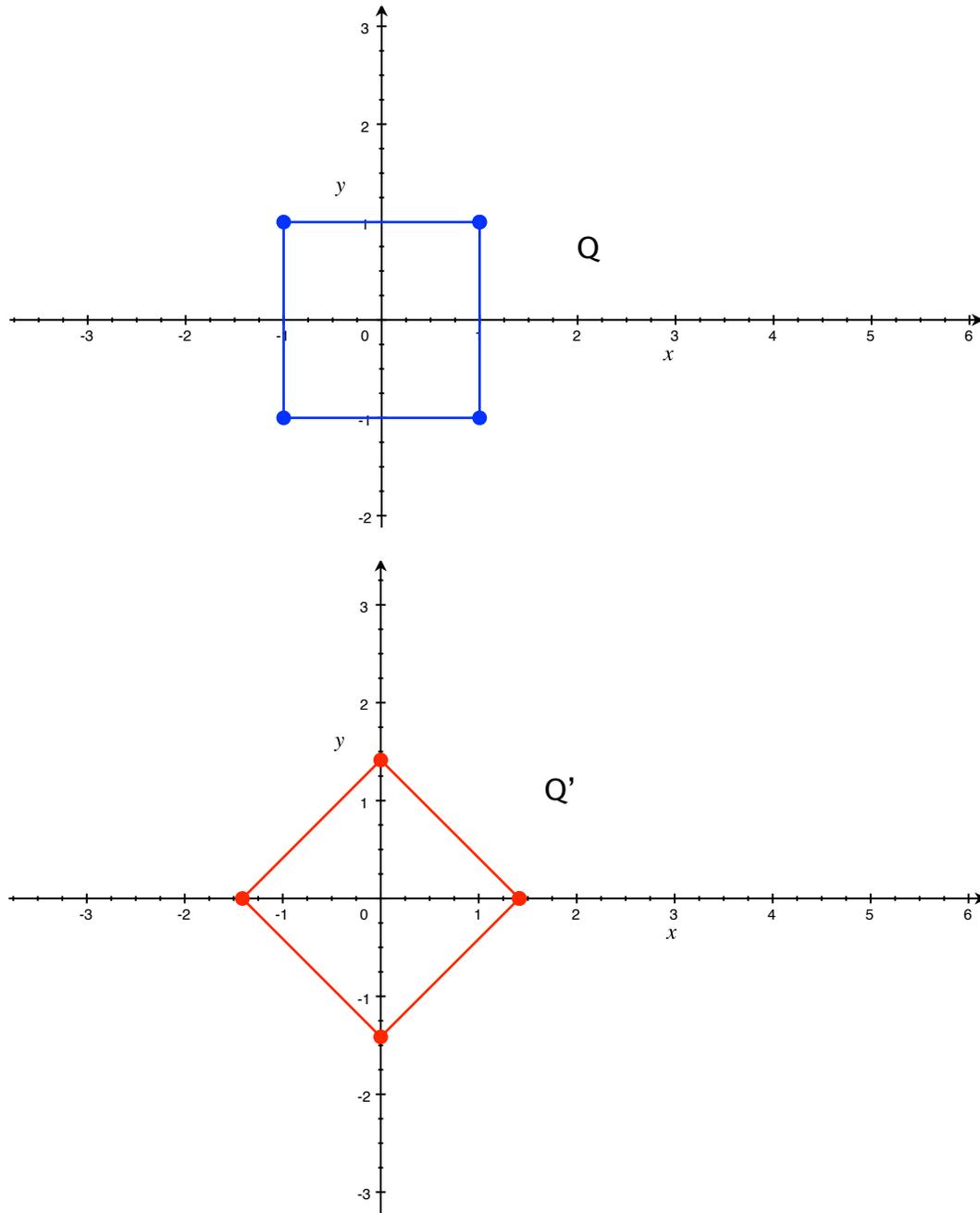
$$ae - bd = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{ROTO-TRASLAZIONE}$$

### Schema riassuntivo degli invarianti delle trasformazioni

	Traslazione	Omotetia	Rotazione
Area	SI	NO	SI
Lunghezze	SI	NO	SI
Angoli	SI	SI	SI

## ESERCIZIO n. 1 (2017)

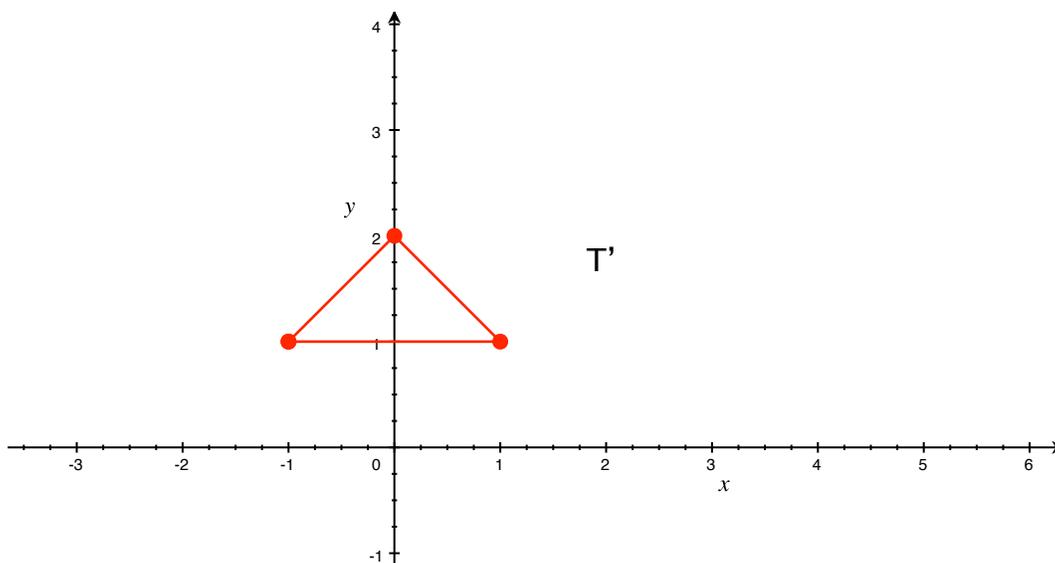
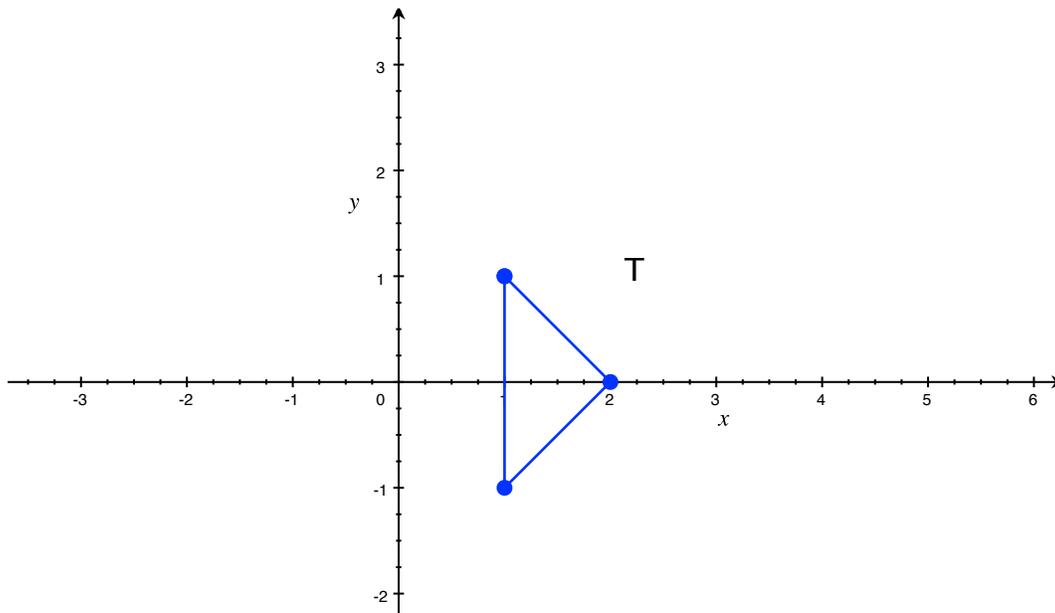
Si considerino i due quadrati  $Q$  e  $Q'$ .



- i)* Esiste una trasformazione che porta  $Q$  in  $Q'$ ? Se esiste, come può essere scritta?
- ii)* Si conservano area, perimetro, angoli?

## ESERCIZIO n. 2 (2017)

Si considerino i due triangoli  $T$  e  $T'$



- i)* Esiste una trasformazione che porta  $T$  in  $T'$ ? Se esiste, come può essere scritta?
- ii)* Si conservano area, perimetro, angoli?

### ESERCIZIO n. 3 (2017)

- i)* Disegnare il segmento  $s$  di estremi  $(0,0)$  e  $(\frac{1}{3}, 0)$  e determinare le coordinate degli estremi del segmento  $s'$  ottenuto ruotando  $s$  di  $60$  gradi in senso antiorario attorno all'origine.
- ii)* Unire ad  $s$  il segmento  $s''$  ottenuto traslando  $s'$  di  $\frac{1}{3}$  verso destra. Cosa si ottiene?
- iii)* Scrivere le trasformazioni geometriche coinvolte nei punti *i)* e *ii)*.

### ESERCIZIO n. 4 (2017)

- i)* Disegnare il segmento  $\sigma$  di estremi  $(0,0)$  e  $(-\frac{1}{3}, 0)$  e determinare le coordinate degli estremi del segmento  $\sigma'$  ottenuto ruotando  $\sigma$  di 60 gradi in senso orario attorno all'origine.
- ii)* Traslare  $\sigma$  di 1 verso destra e, successivamente, traslare  $\sigma'$  di  $\frac{2}{3}$  verso destra. Unire i segmenti ottenuti. Che cosa si trova?
- iii)* Scrivere le trasformazioni geometriche coinvolte nei punti *i)* e *ii)*.

### ESERCIZIO n. 5 (2017)

Unire le figure ottenute negli esercizi 1 e 2.

- i)* Quali e quante trasformazioni sono state usate?
- ii)* Secondo voi le trasformazioni usate sono le uniche possibili?

### ESERCIZIO n. 6 (2017)

Assegnate le trasformazioni

$$T_1 : \begin{cases} X = \frac{1}{3}x \\ Y = \frac{1}{3}y \end{cases} \quad T_2 : \begin{cases} X = \frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y \end{cases} \quad T_3 : \begin{cases} X = -\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{2}{3} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{6}y \end{cases} \quad T_4 : \begin{cases} X = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ Y = \frac{1}{3}y \end{cases}$$

- i)* riconoscere le trasformazioni elementari che intervengono nelle  $T_1, \dots, T_4$ .
- ii)* Applicare le trasformazioni  $T_1, \dots, T_4$  al segmento di estremi  $(0,0)$  e  $(1,0)$ . Disegnare i segmenti risultanti nello stesso sistema di riferimento. Che cosa si trova?

## ESERCIZIO n. 7 (2017): Costruzione della curva di von Koch

Passo 0. Disegnare il segmento  $k$  di estremi  $(0,0)$  e  $(1,0)$ .

Passo 1. Dividere  $k$  in tre segmenti di uguale lunghezza individuando le coordinate degli estremi di tali segmenti.

Passo 2. Costruire un triangolo equilatero avente come base il segmento centrale, contenuto nel primo quadrante, individuando le coordinate dei suoi vertici.

Passo 3. Rimuovere la base del triangolo.

Passo 4. Ripetere i tre passi precedenti partendo dal segmento  $k'$  di estremi  $(0,0)$  e  $(\frac{1}{3}, 0)$ .

Che relazione intercorre tra la curva costruita al Passo 3 e quella costruita al Passo 4?

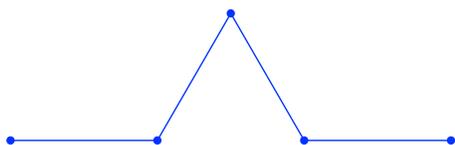
II) Nel secondo incontro si ragiona sulle nozioni di misura e dimensione. Gli studenti si cimentano innanzitutto nel calcolo della lunghezza e dell'area della curva di von Koch. Ragionando sulle misure già note (0, 1, 2, 3-dimensionali) gli studenti scoprono, attraverso esercizi mirati, che esiste un'unica misura strettamente positiva, finita, di una figura geometrica regolare e che essa è legata alla dimensione della figura. Inoltre, essi scoprono che, se provano a misurare la figura in uno spazio di dimensione più piccola, la misura è infinita, mentre è zero se ci si mette in uno spazio di dimensione più grande. Tenuto conto di quanto osservato sulla lunghezza e sull'area della curva di von Koch, gli studenti sono guidati alla scoperta della dimensione frattale. L'incontro si conclude con un'introduzione alla misura di Hausdorff per chiarire agli studenti come si può calcolare la misura di un oggetto di dimensione non intera.

### ESERCIZIO n. 1 (2017)

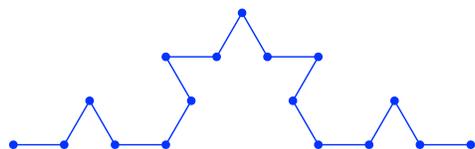
Calcolare la lunghezza delle seguenti spezzate considerate per costruire la curva di von Koch:



$$L_0 = \dots\dots\dots$$



$$L_1 = \dots\dots\dots$$



$$L_2 = \dots\dots\dots$$

Quanto varrà  $L_3$ ?

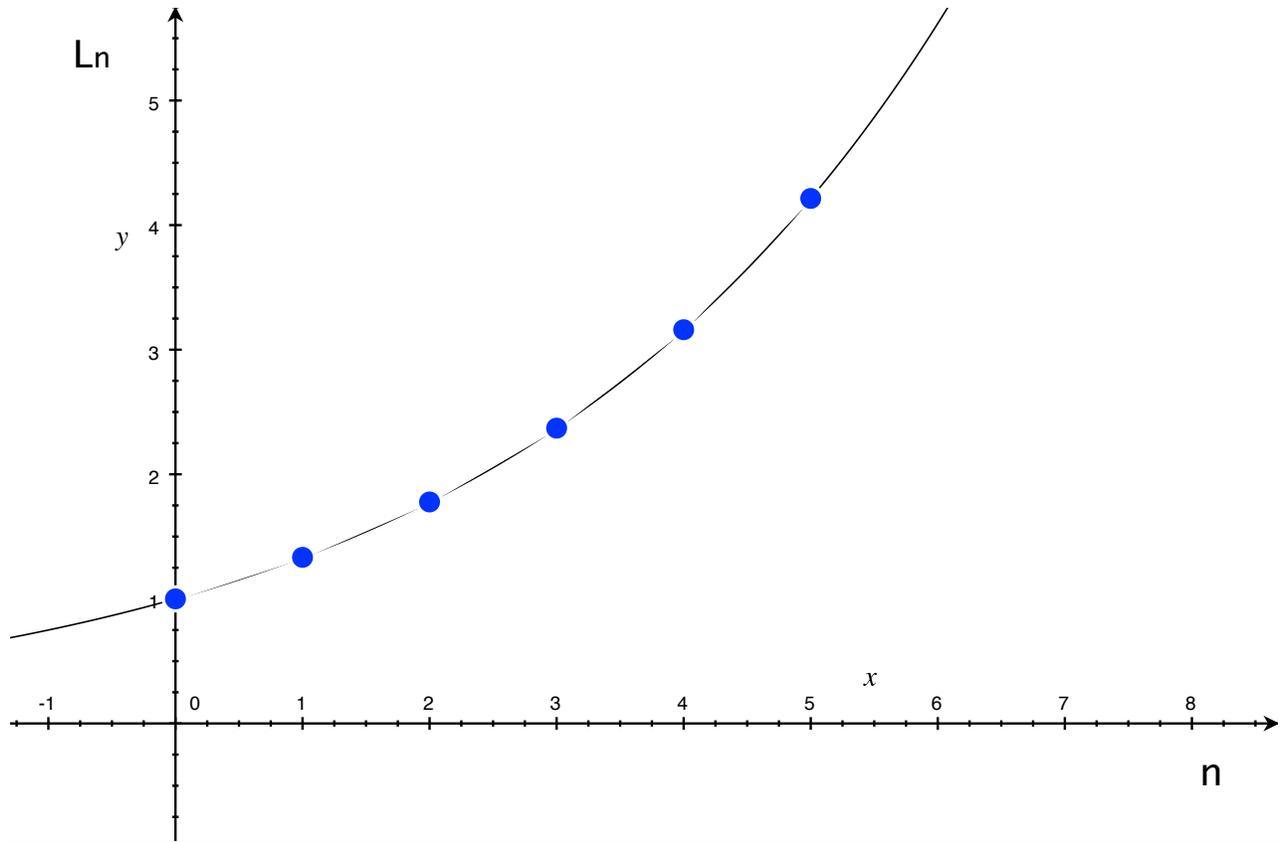
## ESERCIZIO n. 2 (2017)

Riempire la seguente tabella:

$n$	lunghezza di un segmento	numero di segmenti	$L_n$
0			
1			
2			
3			
...			
$n$			

## Osservazioni sulla lunghezza della curva di von Koch

Dal grafico riportato in figura si deduce immediatamente che al crescere del numero di iterazioni  $n$  cresce la lunghezza  $L_n$  della spezzata



e, per rendere questi conti concreti, basta notare che se  $L_0 = 1$  metro, allora

$$L_{24} = 1 \text{ Km}$$

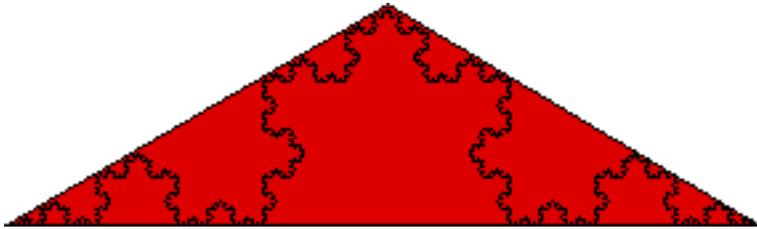
$$L_{128} = 1 \text{ anno luce!!!}$$

### ESERCIZIO n. 3 (2017)

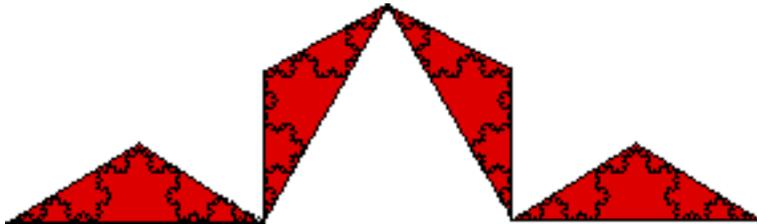
Nessuno si stupisce davanti all'affermazione: un segmento ha area zero. Che succede per una curva "frastagliata" come quella di von Koch?

Proviamo a calcolare l'area della curva di von Koch ricoprendola con triangoli isosceli via via più piccoli.

- i) Se partiamo con un segmento di lunghezza 1, quanto vale la prima approssimazione  $A_0$  dell'area?



- ii) E la seconda approssimazione  $A_1$ ?



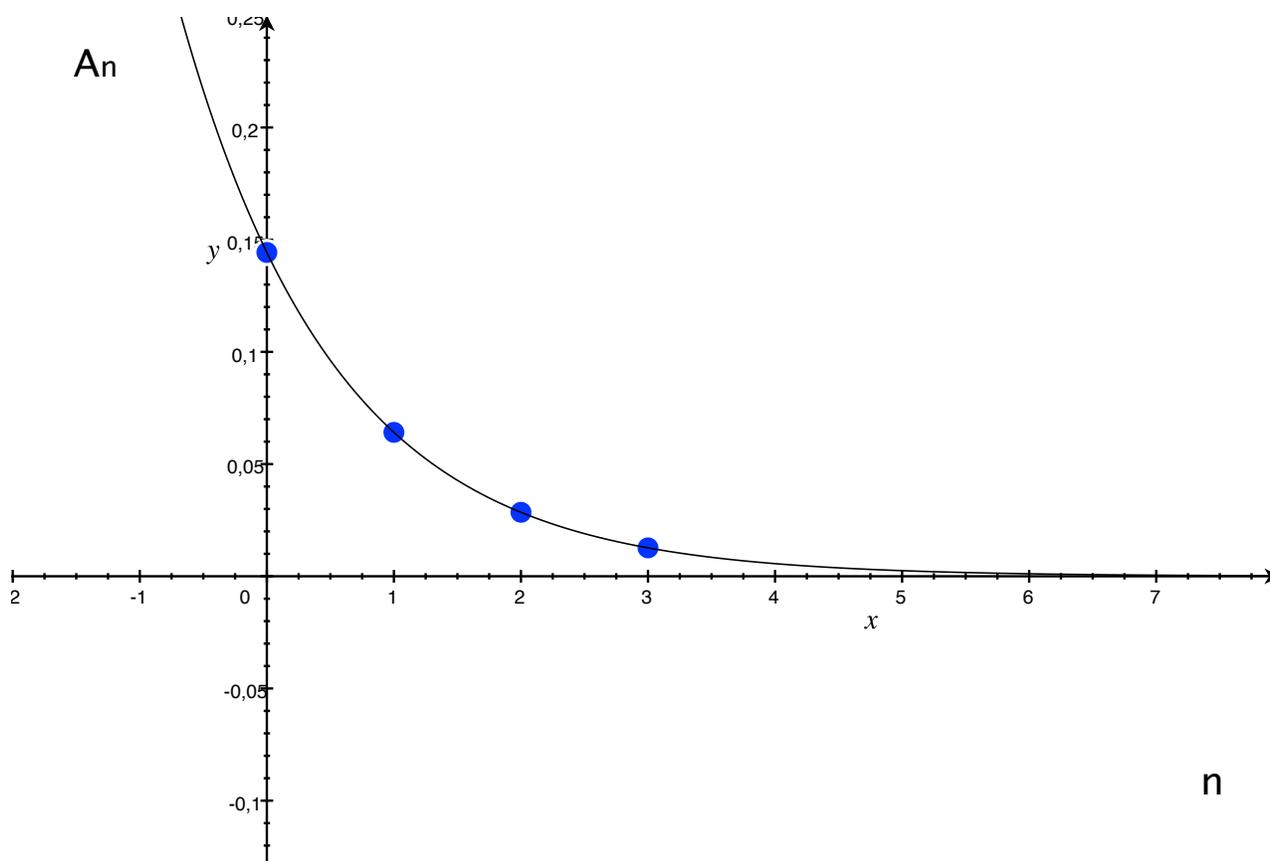
- iii) E la terza approssimazione  $A_2$ ?



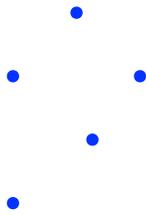
## Osservazioni sull'area della curva di von Koch

$n$	area di un triangolo	numero di triangoli	$A_n$
0	$\frac{\sqrt{3}}{12}$	1	$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{12}$
1	$\frac{\sqrt{3}}{12} \frac{1}{9}$	4	$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{4}{9}$
2	$\frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{1}{9}\right)^2$	$16 = 4^2$	$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{16}{81} = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^2$
...			
$n$	$\frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{1}{9}\right)^n$	$4^n$	$A_n = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^n$

Dai dati riportati in tabella e dal grafico in figura si deduce immediatamente che nel caso della curva di von Koch l'area vale zero.



ESERCIZIO n. 4 (2017): Cosa intendiamo per misura di un insieme?



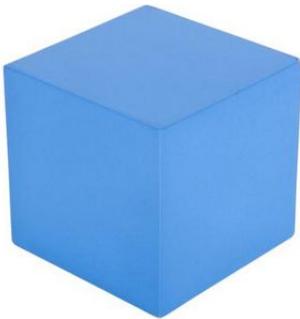
.....



.....



.....



.....

### ESERCIZIO n. 5 (2017)

Con i dati raccolti nell'esercizio precedente otteniamo la seguente tabella:

Dimensione	Misura che conta i punti	Lunghezza	Area	Volume
0	$>0$	0	0	0
1	$\infty$	$>0$	0	0
2	$\infty$	$\infty$	$>0$	0
3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$>0$

Osserviamo che esiste sempre un'unica misura strettamente positiva. I valori delle altre misure sono zero o infinito.

In quali casi la misura vale zero?

In quali casi la misura vale infinito?

### ESERCIZIO n. 6 (2017)

Dato un segmento di lunghezza 1, basta un segmento di lunghezza 1 per ricoprire completamente il segmento.

- i)* Quanti segmenti di lunghezza  $\frac{1}{2}$  servono per ricoprire completamente il segmento?
- ii)* Quanti segmenti di lunghezza  $\frac{1}{3}$  servono per ricoprire completamente il segmento?
- iii)* Quanti segmenti di lunghezza  $\frac{1}{6}$  servono per ricoprire completamente il segmento?
- iv)* Quanti segmenti di lunghezza  $\frac{1}{k}$  servono per ricoprire completamente il segmento?

### ESERCIZIO n. 7 (2017)

Dato un quadrato di lato 1, basta un quadrato di lato 1 per ricoprire completamente il quadrato assegnato.

- i)* Quanti quadrati di lato  $\frac{1}{2}$  servono per ricoprire completamente il quadrato?
- ii)* Quanti quadrati di lato  $\frac{1}{3}$  servono per ricoprire completamente il quadrato?
- iii)* Quanti quadrati di lato  $\frac{1}{6}$  servono per ricoprire completamente il quadrato?
- iv)* Quanti quadrati di lato  $\frac{1}{k}$  servono per ricoprire completamente il quadrato?

### ESERCIZIO n. 8 (2017)

Dato un cubo di spigolo 1, basta un cubo di spigolo  $\frac{1}{k}$  per ricoprire completamente il cubo assegnato.

- i)* Quanti cubi di spigolo  $\frac{1}{2}$  servono per ricoprire completamente il cubo?
- ii)* Quanti cubi di spigolo  $\frac{1}{3}$  servono per ricoprire completamente il cubo?
- iii)* Quanti cubi di spigolo  $\frac{1}{6}$  servono per ricoprire completamente il cubo?
- iv)* Quanti cubi di spigolo  $\frac{1}{k}$  servono per ricoprire completamente il cubo?

### ESERCIZIO n. 9 (2017)

Assegnata la curva di von Koch  $\gamma$ ,

- i)* quante curve ottenute da  $\gamma$  con un'omotetia di rapporto  $\frac{1}{3}$  servono per ricoprire completamente  $\gamma$ ?
- i)* Quante curve ottenute da  $\gamma$  con un'omotetia di rapporto  $\frac{1}{9}$  servono per ricoprire completamente  $\gamma$ ?
- ii)* Quante curve ottenute da  $\gamma$  con un'omotetia di rapporto  $\frac{1}{3^n}$  servono per ricoprire completamente  $\gamma$ ?
- iii)* Calcolare la dimensione di  $\gamma$ .

III) Il terzo incontro è dedicato ancora al concetto di misura di un frattale. Poiché in generale non si riesce a calcolare la misura di Hausdorff  $d$ -dimensionale di un frattale di dimensione  $d$  non intera, gli studenti calcolano la misura in dimensione intera minore di  $d$  o maggiore di  $d$ . Per fare ciò occorre sommare una serie geometrica. Pertanto si introduce attraverso esempi elementari la nozione di serie geometrica e se ne calcola la somma. Vengono proposti vari esercizi per prendere confidenza con le serie geometriche e vederne varie applicazioni. Si calcolano quindi la lunghezza dell'insieme di Cantor e l'area del tappeto di Sierpinski. L'incontro si conclude con la proiezione di immagini e filmati che permettono agli studenti di riconoscere le proprietà dei frattali studiate durante il laboratorio: autosimilarità, dimensione non intera, indipendenza dalla forma iniziale.

Di seguito vengono riportati gli esercizi proposti agli studenti.

### ESERCIZIO n. 1 (2017)

Assegnata la successione di numeri positivi:

$$1, h, h^2, h^3, \dots, h^n, \dots$$

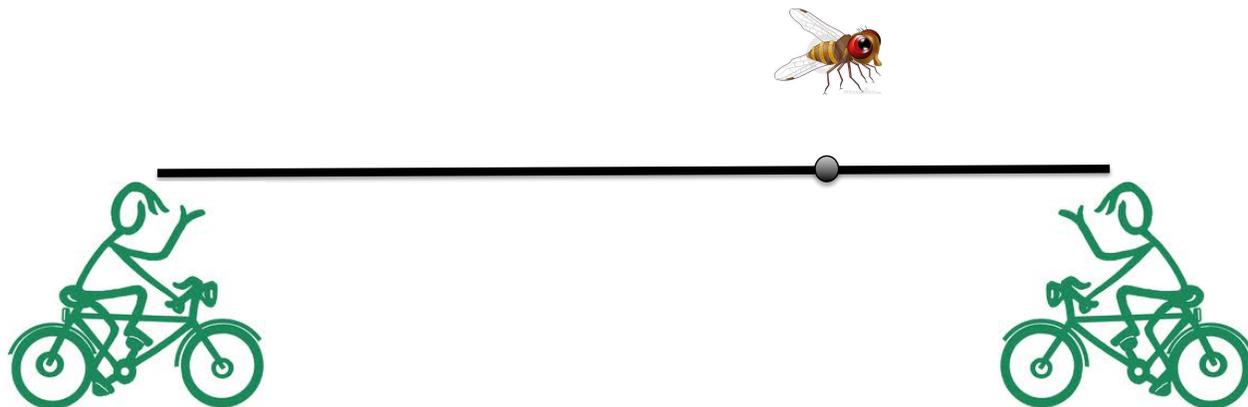
- i)* Come si possono sommare tutti i numeri della successione, secondo voi, al variare di  $h$ ?
- ii)* Ci sono casi in cui la somma è finita?

### ESERCIZIO n. 2 (2017)

- i)* Scrivere la frazione generatrice di  $3, \overline{24}$ .
- ii)* Quanto vale  $0, \overline{9}$ ?

### ESERCIZIO n. 3 (2017)

Due ciclisti distanti tra loro 100 chilometri vogliono incontrarsi. Partono contemporaneamente e si muovono entrambi a 10 km/h. Nel medesimo istante una mosca lascia la prima bicicletta e vola verso la seconda a 20 km/h. Una volta giunta e posatasi sulla seconda bicicletta, riparte alla stessa velocità per tornare a posarsi sulla prima. La mosca continua a volare dall'una all'altra bicicletta finchè i due ciclisti si incontrano.



- i) Verificare che ogni volta la mosca percorre  $\frac{2}{3}$  della distanza tra le biciclette.
- ii) Quanti chilometri ha percorso in totale la mosca?

### ESERCIZIO n. 4 (2017)

L'insieme di Cantor può essere costruito nel modo seguente.

Passo 0. Prendere un segmento di lunghezza 1.

Passo 1. Dividere il segmento in tre segmenti uguali.

Passo 2. Rimuovere il segmento centrale.

Passo 3. Ripetere i passi 1-2 su ogni nuovo segmento.



L'insieme di Cantor è l'insieme che si ottiene con infinite iterazioni, rimuovendo ad ogni passaggio solo il segmento centrale che si forma nella suddivisione di ciascun segmento in 3 segmenti più piccoli; dunque, in definitiva, l'insieme di Cantor è costituito dalla parte blu che rimane in figura, dopo infinite iterazioni.

- i)* Calcolare la lunghezza delle parti bianche dopo 1, 2, 3 iterazioni.
- ii)* Quanto vale la lunghezza dell'insieme di Cantor?
- iii)* Calcolare la dimensione dell'insieme di Cantor.

### ESERCIZIO n. 5 (2017)

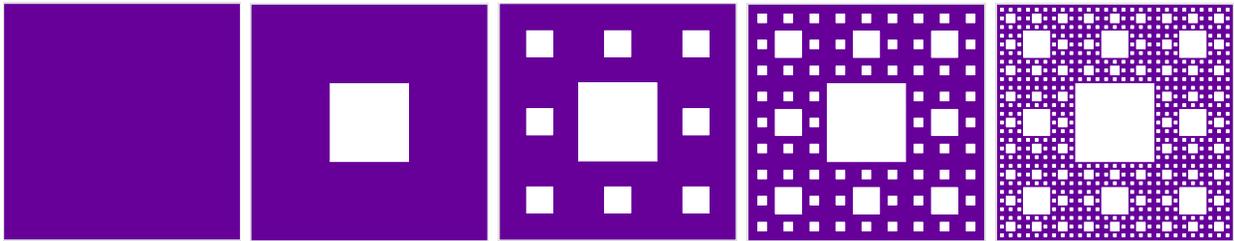
Il tappeto di Sierpinski può essere costruito nel modo seguente.

Passo 0. Prendere un quadrato di lato 1.

Passo 1. Dividere il quadrato in 9 quadrati più piccoli, ottenuti dividendo ogni lato in tre parti uguali.

Passo 2. Rimuovere il quadrato centrale.

Passo 3. Ripetere i passi 1-2 su ogni nuovo quadrato.



Il tappeto di Sierpinski è l'insieme che si ottiene con infinite iterazioni, rimuovendo ad ogni passaggio solo il quadrato centrale che si forma nella suddivisione di ciascun quadrato in 9 quadrati più piccoli; dunque, in definitiva, il tappeto di Sierpinski è costituito dalla parte viola che rimane in figura, dopo infinite iterazioni.

- i)* Calcolare l'area delle parti bianche dopo 1, 2, 3 iterazioni.
- ii)* Quanto vale l'area del tappeto?
- iii)* Calcolare la dimensione del tappeto di Sierpinski.



### ESERCIZIO n. 7 (2017)

Poniamo

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$

Moltiplicando per 3 otteniamo

$$3S = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = 3 + S.$$

Sembra quindi di poter concludere che  $S = \frac{3}{2}$  (VERO!).

D'altra parte, con lo stesso procedimento, posto

$$T = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \dots,$$

otteniamo

$$3T = 3 + 9 + 27 + 81 + \dots = T - 1,$$

cioè  $T = -\frac{1}{2}$ , che è un risultato inaccettabile. Come è possibile?

### ESERCIZIO n. 8 (2017)

Sia  $x > 0$ ; da quanto sappiamo sulla serie geometrica risulta

$$x + x^2 + \dots = \frac{x}{1-x}$$

ed anche

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots = \frac{1}{1-1/x} = \frac{x}{x-1}.$$

Sommando otteniamo la seguente formula (attribuita ad Eulero)

$$\dots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \dots = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{1-x} = 0.$$

Dov'è l'errore?

### ESERCIZIO n. 9 (2017)

La serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

che può essere scritta nel seguente modo

$$(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \dots,$$

è la serie geometrica di ragione -1, pertanto

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}.$$

Ma

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

ed anche

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

Inoltre, commutando i termini a due a due, risulta

$$-1 + 1 - 1 + 1 + \dots = -(1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = -\frac{1}{2}$$

ed anche

$$-1 + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = -1 + 0 + 0 + \dots = -1.$$

Come è possibile?

### ESERCIZIO n. 10 (2017)

Consideriamo la serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

Posto

$$W = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

abbiamo

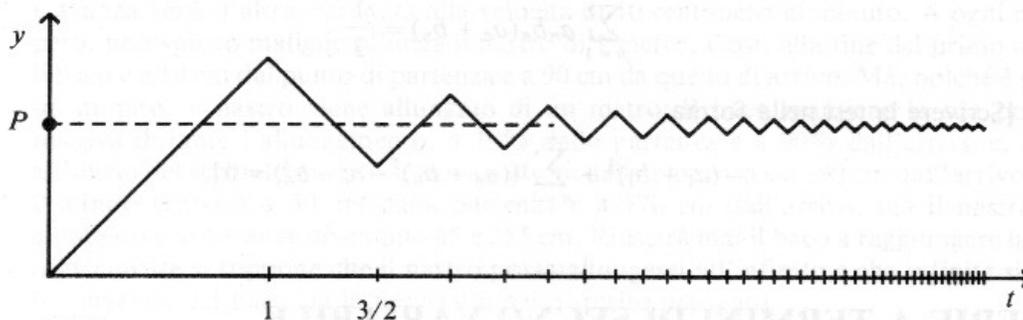
$$\begin{aligned} W &> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = W, \end{aligned}$$

risultato alquanto sconcertante. Come possiamo spiegarlo?

Concludiamo con la seguente identità

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \log 2.$$

Infatti, consideriamo una pallina che, partendo dall'origine, si muova lungo l'asse  $y$  con velocità unitaria; la pallina dopo 1 secondo inverte la direzione del moto, la inverte nuovamente dopo  $1/2$  secondo, ancora dopo  $1/3$  di secondo e così via. Ricordando che la serie armonica è divergente, la pallina continuerà a muoversi per un tempo infinito e dunque percorrerà una distanza infinita. Sembra tuttavia ragionevole poter individuare un punto  $P$  dell'asse  $y$  al quale la pallina si avvicina sempre di più (vedi figura in cui è riportato il grafico della legge oraria  $y(t)$ ) e chiamare l'ordinata di tale punto somma della serie armonica a segni alterni.



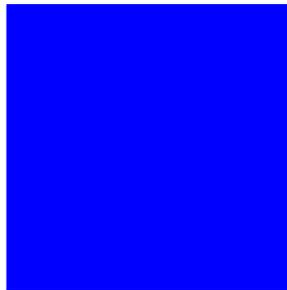
IV) Il quarto incontro è dedicato al trattamento delle immagini, viste come figure geometriche piane autosimili o localmente autosimili. Con esempi si fa notare agli studenti che è possibile costruire una corrispondenza tra le porzioni di immagine contenute nei quadrati di una griglia 32x32 pixel e quelle contenute nei quadrati di una griglia 16x16 pixel. Si giunge alla conclusione che per memorizzare un'immagine è sufficiente memorizzare la lista di associazioni tra le due griglie. Questa fase è nota come compressione frattale di un'immagine. Il processo di ricostruzione consente di risalire all'immagine a partire dalla lista di associazioni iterando il seguente ragionamento.

- a) Prendiamo una figura piena ed inseriamola nella griglia 32x32.
- b) Consideriamo la griglia dei quadrati 16x16 vuota e riempiamola in accordo con la lista delle associazioni.
- c) Inseriamo la figura ottenuta nella griglia dei quadrati 32x32 ed iteriamo il procedimento sopra descritto a partire dal punto a).

Di seguito vengono riportati gli esercizi proposti agli studenti.

### ESERCIZIO n. 1 (2017)

A partire dalla figura

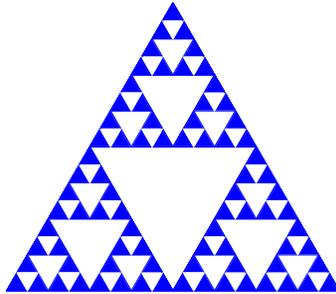


iterare tre volte il ragionamento sopra descritto utilizzando la seguente lista di associazioni:

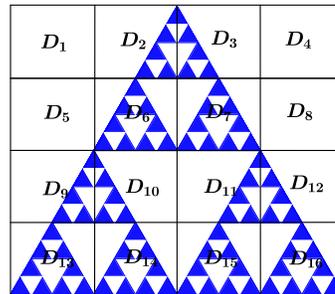
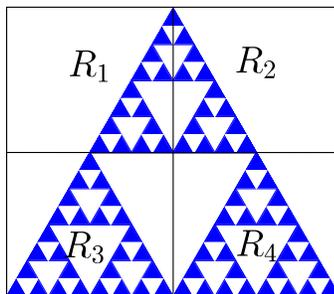
$$\begin{aligned} D_2 &\longleftarrow R_1 \\ D_3 &\longleftarrow R_2 \\ D_6 &\longleftarrow R_3 \\ D_7 &\longleftarrow R_4 \\ D_9 &\longleftarrow R_1 \\ D_{12} &\longleftarrow R_2 \\ D_{13} &\longleftarrow R_3 \\ D_{16} &\longleftarrow R_4. \end{aligned}$$

## ESERCIZIO n. 2 (2017)

Consideriamo il triangolo di Sierpinski.



Per comprimere l'immagine inseriamo due copie del triangolo nelle griglie 32x32 e 16x16.



Scrivere la lista delle associazioni.

## ESERCIZIO n. 3 (2017)

A partire dalla figura



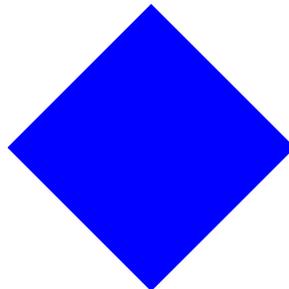
iterare tre volte il ragionamento descritto a pagina 1 utilizzando la seguente lista di associa-

zioni:

$$\begin{aligned} D_2 &\longleftarrow R_1 \\ D_3 &\longleftarrow R_2 \\ D_6 &\longleftarrow R_3 \\ D_7 &\longleftarrow R_3 \\ D_9 &\longleftarrow R_1 \\ D_{10} &\longleftarrow R_2 \\ D_{11} &\longleftarrow R_1 \\ D_{12} &\longleftarrow R_2 \\ D_{13} &\longleftarrow R_3 \\ D_{14} &\longleftarrow R_3 \\ D_{15} &\longleftarrow R_3 \\ D_{16} &\longleftarrow R_3. \end{aligned}$$

#### ESERCIZIO n. 4 (2017)

A partire dalla figura



iterare tre volte il ragionamento descritto a pagina 1 utilizzando la seguente lista di associazioni:

$$\begin{aligned} D_2 &\longleftarrow R_1 \\ D_3 &\longleftarrow R_2 \\ D_6 &\longleftarrow R_3 \\ D_7 &\longleftarrow R_4 \\ D_9 &\longleftarrow R_1 \\ D_{12} &\longleftarrow R_2 \\ D_{13} &\longleftarrow R_3 \\ D_{16} &\longleftarrow R_4. \end{aligned}$$