

# FRATTALI:

## LA GEOMETRIA DELLA NATURA

Università degli Studi di Napoli Federico II  
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"  
Febbraio 2017

***“How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension”*** è un articolo scientifico pubblicato dal matematico polacco-francese Benoit B. Mandelbrot su SCIENCE nel 1967.



Unità = 200 km, Lunghezza ~ 2400 km



Unità = 50 km, Lunghezza ~ 3400 km

## Paradosso della linea costiera

La lunghezza della linea costiera dipende dalla scala sulla quale viene misurata, ed empiricamente aumenta quando si riduce l'ampiezza dell'unità di misura di riferimento.

Ad esempio, misurando una curva con una riga lunga un metro, la misura sarà in genere minore rispetto alla stessa misura effettuata con un righello da 50 cm.

Paradossalmente si può dedurre che la lunghezza della linea costiera è infinita.



Non ha significato parlare in senso assoluto di lunghezza della linea costiera, ma è necessario introdurre un nuovo concetto di misura.

## Cosa intendiamo per scala?

Una scala è il livello di dettaglio con cui guardiamo un sistema.

Per esempio, in:

- Economia: dalla finanza personale (in cui la scala è la persona) all'economia globale (in cui la scala è tutto il mondo)
- Fisica: dalle particelle subatomiche all'intero universo
- Scienze: dalle molecole all'individuo

Le leggi che governano un sistema possono variare a seconda della scala. È sempre così?



## Cosa intendiamo per scala?

Le leggi fisiche, come ad esempio la legge di gravitazione, sono (almeno nella teoria classica!) universali e quindi indipendenti dalla scala.



Osserviamo comportamenti simili in fenomeni diversi, studiati su scale diverse.

Questa perdita di una “scala preferita” non è un problema, anzi ci apre nuovi orizzonti!



*“Now, as Mandelbrodt points out [...] nature has played a joke on the mathematicians. The 19th-century mathematicians may have been lacking in imagination, but nature was not. The same pathological structures that the mathematicians invented to break loose from 19th-century naturalism turn out to be inherent in familiar objects all around us in nature.”*

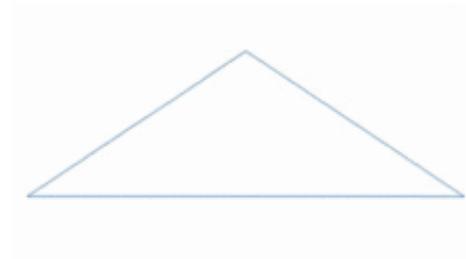
Freeman Dyson, *Characterizing irregularity, Science 200 (1978)*.

Ora, come ha notato Mandelbrodt, la natura ha giocato un brutto tiro ai matematici. I matematici del XIX secolo potrebbero aver mancato di immaginazione, ma la natura no. Le stesse strutture patologiche che i matematici avevano inventato per liberarsi dal naturalismo del XIX secolo si ritrovano in natura in oggetti a noi familiari.



*“Perchè la geometria è spesso descritta come fredda e asciutta? Una ragione sta nell’incapacità di descrivere la forma di una nuvola, di una montagna, del profilo di una costa o di un albero. Le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, le coste non sono cerchi e la corteccia non è piana, né un fulmine viaggia su una linea retta.”*

Benoit B. Mandelbrot, **The fractal geometry of nature (1977)**



**Frattale:**

dal latino **“fractus”**, che significa **“interrotto”** o **“irregolare”**

## Definizione naïve di frattale

Un frattale  $F$  è una figura geometrica complessa che possiede, tra le altre, le seguenti proprietà che lo distinguono dalle figure della geometria euclidea:

- **Autosimilarità o invarianza per cambiamento di scala:**  
*“Un frattale è un oggetto geometrico fatto di parti in un certo senso simili al tutto”* (B. Mandelbrot)

$F$  è unione di un numero di parti che, ingrandite di un certo fattore, riproducono tutto  $F$ ; in altri termini  $F$  è unione di copie di se stesso a scale differenti

- **Dimensione non intera (???)**

- **Costruzione per ricorsività:**

$F$  non può essere descritto come luogo di punti che soddisfano semplici condizioni geometriche o analitiche, bensì tramite un algoritmo che prevede, in teoria, un numero infinito di iterazioni.



Sigla della Domenica Sportiva

## Prima di Mandelbrot

Prima che Mandelbrot formalizzasse la nozione di frattale e ne studiasse le proprietà matematiche, altri matematici e filosofi ne avevano intuito l'esistenza ed avevano tentato di descriverli.

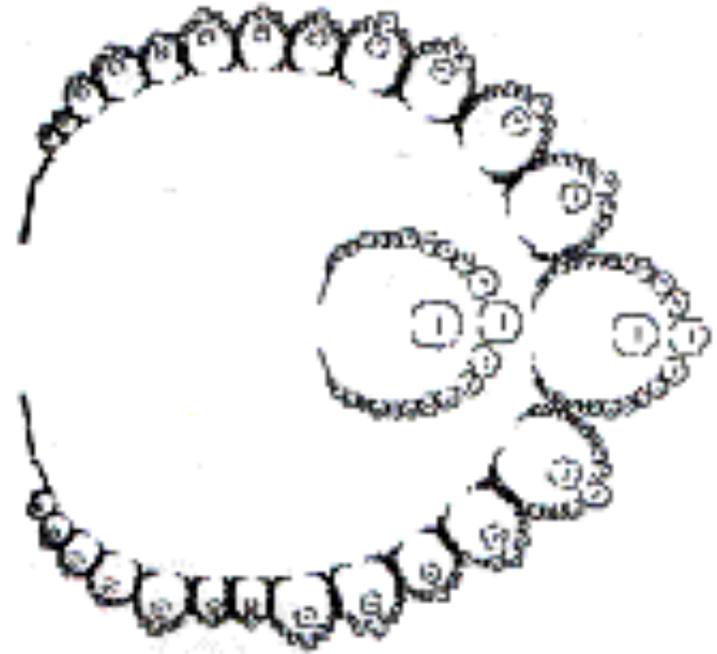
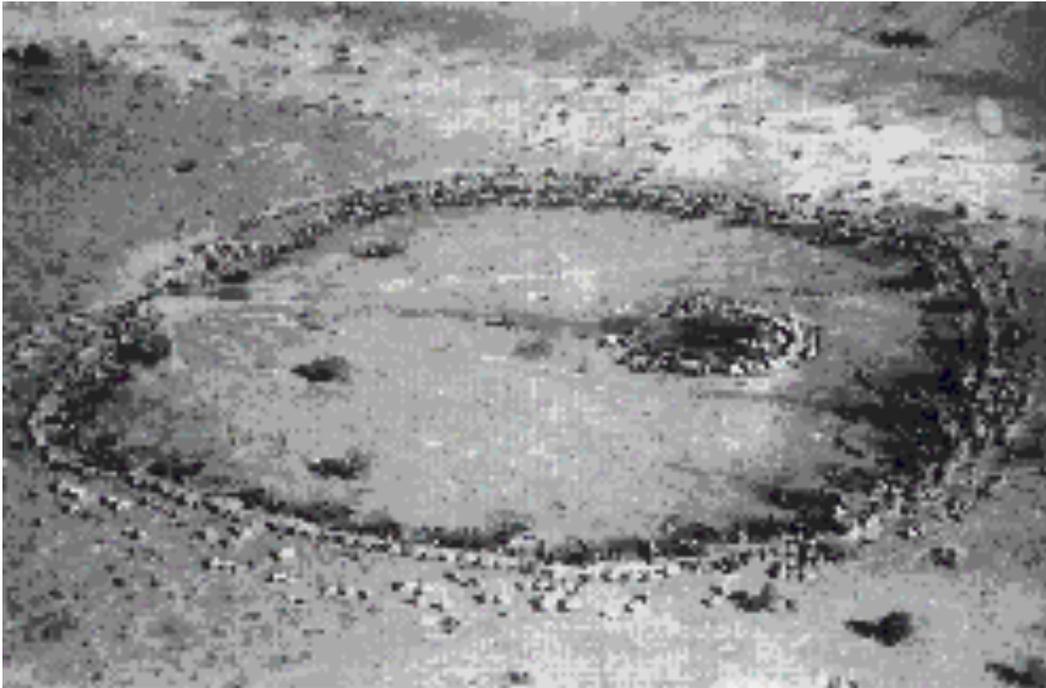
*“Ogni porzione di materia può essere concepita come un giardino pieno di piante e come uno stagno pieno di pesci; ma ogni ramo di pianta, ogni membro di animale, ogni goccia dei loro umori, è ancora un giardino simile, un simile stagno ”*

Leibniz, *Monadologia*, 1714



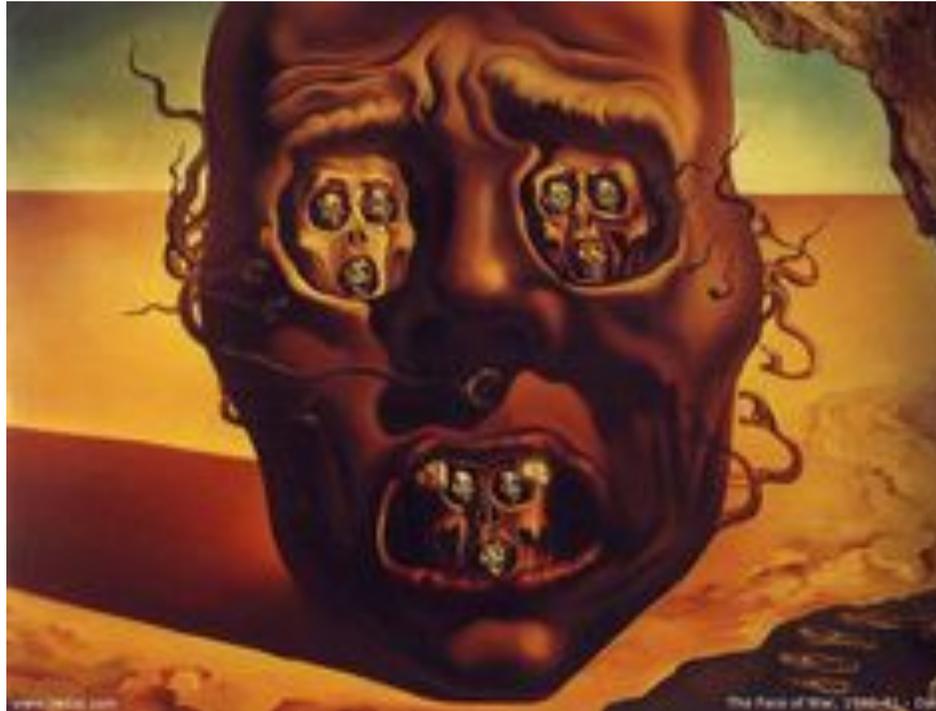
Ed anche: Tartaglia, Peano, Cantor, Sierpinski, Hilbert, von Koch, Julia,...

## Architettura e frattali



Villaggio nel sud dello Zambia

## Arte e frattali



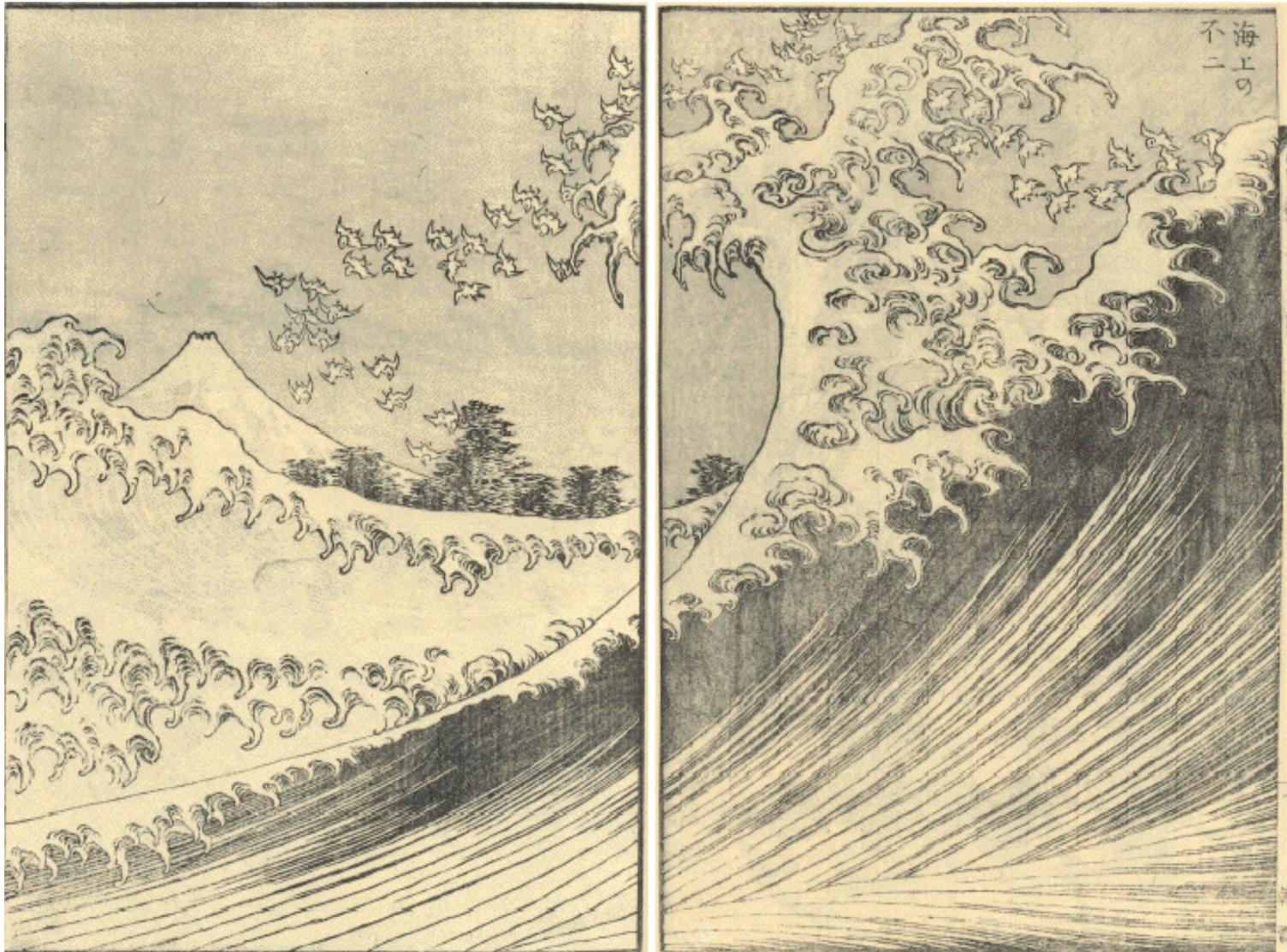
Salvador Dalí, Il volto della guerra (1940-41)

## Arte e frattali



Hokusai, La grande onda di Kanagawa 1830 (xilografia)

## Arte e frattali



Hokusai, Il Fuji dal mare

## Da “Palomar”, di Italo Calvino (1983)

[...]

Il signor Palomar vede spuntare un'onda in lontananza, crescere, avvicinarsi, cambiare di forma e di colore, avvolgersi su se stessa, rompersi, svanire, rifluire. A questo punto potrebbe convincersi d'aver portato a termine l'operazione che s'era proposto e andarsene. Però isolare un'onda separandola dall'onda che immediatamente la segue e pare la sospinga e talora la raggiunge e travolge, è molto difficile; così come separarla dall'onda che la precede e che sembra trascinarsela dietro verso la riva, salvo poi magari voltarglisi contro come per fermarla. Se poi si considera ogni ondata nel senso dell'ampiezza, parallelamente alla costa, è difficile stabilire fin dove il fronte che avanza s'estende continuo e dove si separa e segmenta in onde a sé stanti, distinte per velocità, forma, forza, direzione. Insomma, non si può osservare un'onda senza tener conto degli aspetti complessi che concorrono a formarla e di quelli altrettanto complessi a cui essa dà luogo. Questi aspetti variano continuamente, per cui un'onda è sempre diversa da un'altra onda; ma è anche vero che ogni onda è uguale a un'altra onda, anche se non immediatamente contigua o successiva; insomma ci sono delle forme e delle sequenze che si ripetono, sia pur distribuite irregolarmente nello spazio e nel tempo. Siccome ciò che il signor Palomar intende fare in questo momento è semplicemente vedere un'onda, cioè cogliere tutte le sue componenti simultanee senza trascurarne nessuna, il suo sguardo si soffermerà sul movimento dell'acqua che batte sulla riva finché potrà registrare aspetti che non aveva colto prima; appena s'accorgerà che le immagini si ripetono saprà d'aver visto tutto quel che voleva vedere e potrà smettere. [...]

## Arte e frattali



Jackson Pollock, Alchemy 1947

## Frattali in natura







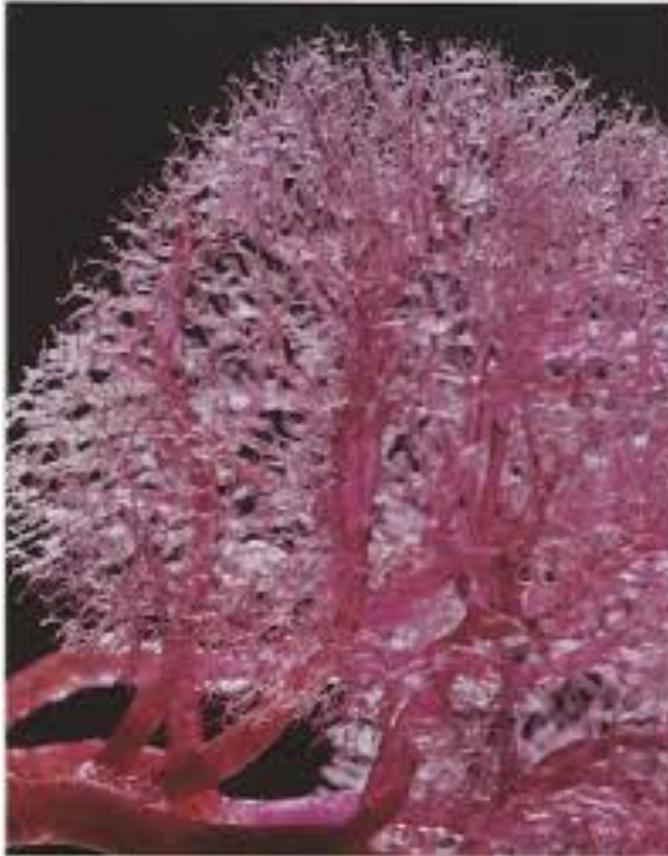




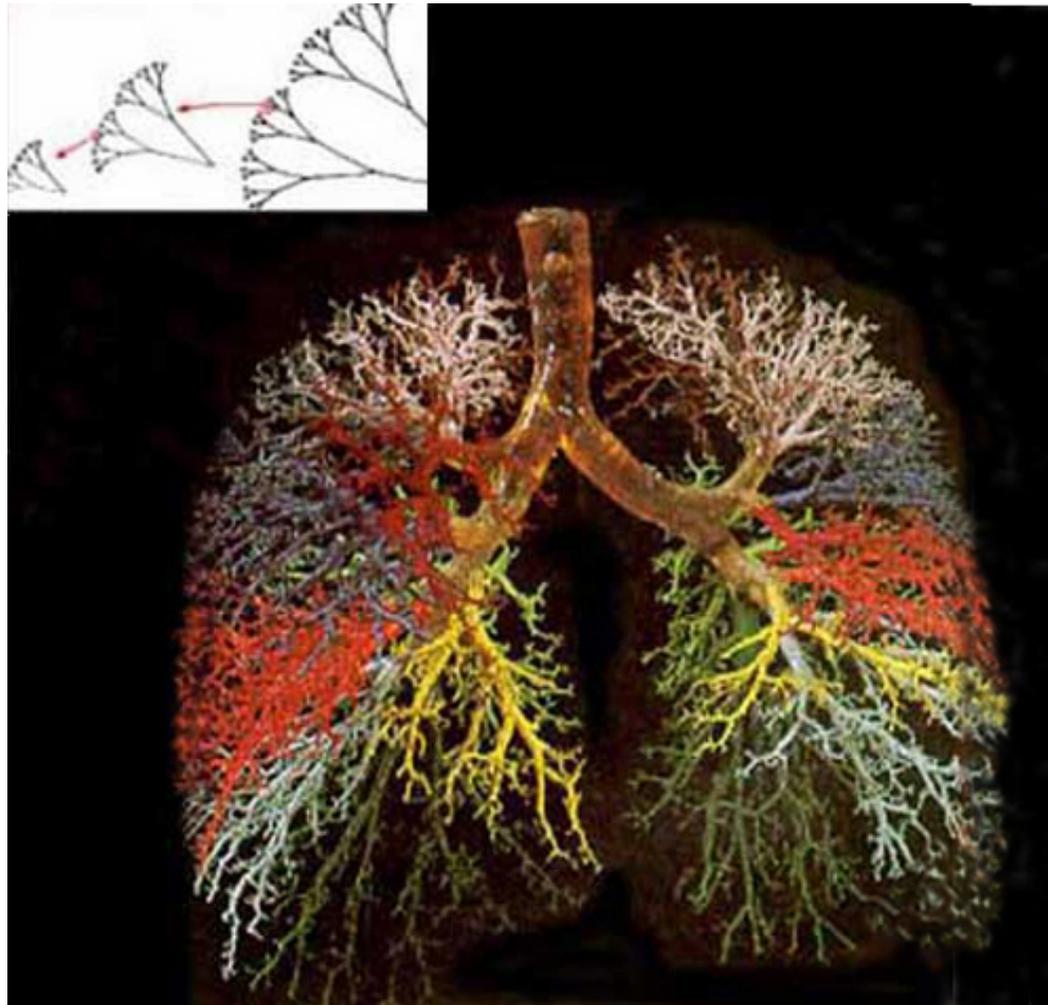


Yemen,  
Wadi Hadramawt





Sistema venoso ed arterioso del rene di un bambino



Broncogramma umano

