Pagine di Algebra lineare

di premessa al testo **Pagine di Geometria** di *Sara Dragotti*

Parte prima: SPAZI VETTORIALI

1. Premessa

Si rinvia al testo di algebra per tutte le premesse di carattere insiemistico (insieme, applicazione, relazione di equivalenza, operazioni, ...) e per le definizioni di struttura algebrica, gruppo, anello, campo, esempi e proprietà elementari dei campi.

Tali argomenti vengono comunque svolti a lezione.

2. Spazio vettoriale su un campo

Siano V un insieme non vuoto, i cui elementi indicheremo con lettere latine in grassetto, e $(\mathrm{K};+,\cdot)$ un campo, i cui elementi indicheremo di solito con lettere greche o latine non in grassetto, mentre con 1 indicheremo la sua unità.

Diremo che V è dotato di una struttura vettoriale su K se è assegnata in V un'operazione interna

$$\perp:\ \mathrm{V}\times\mathrm{V}\to\mathrm{V}$$

in modo tale che $(\mathrm{V};\perp)$ sia un gruppo abeliano, ed un'operazione esterna $\top$ avente K come insieme di operatori

$$\top:\ \mathrm{K}\times\mathrm{V}\to\mathrm{V}$$

in modo tale che per ogni $\alpha,\beta\in\mathrm{K}$, e per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathrm{V}$ valgano le condizioni

a) $(\alpha+\beta)\top\mathbf{v} = (\alpha\top\mathbf{v})\perp(\beta\top\mathbf{v})$

b) $\alpha\top(\mathbf{v}\perp\mathbf{w}) = (\alpha\top\mathbf{v})\perp(\alpha\top\mathbf{w})$

c) $\alpha\top(\beta\top\mathbf{v}) = (\alpha\cdot\beta)\top\mathbf{v}$

d) $1\top\mathbf{v} = \mathbf{v}$

La terna $(\mathrm{V};\perp,\top)$ sarà detta *spazio vettoriale* su K. Gli elementi di V saranno detti *vettori* e quelli di K *scalari*.

Esempi

1) Ogni campo K ha una struttura canonica di spazio vettoriale su se stesso se si assegna come operazione interna la somma di K e come operazione esterna il prodotto $\cdot$ (ogni operazione interna può essere pensata come operazione esterna).

2) L'esempio 1) è un caso particolare del seguente.
Nel prodotto cartesiano K^n, $n \geq 1$ consideriamo le operazioni
$\perp: \left((\alpha_1,\dots,\alpha_n),(\beta_1,\dots,\beta_n)\right) \in \mathrm{K}^n \times \mathrm{K}^n \to (\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n) \in \mathrm{K}^n$
$\top: \left(\alpha,(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\right) \in \mathrm{K} \times \mathrm{K}^n \to (\alpha\alpha_1,\dots,\alpha\alpha_n) \in \mathrm{K}^n$
Si verifica che $(\mathrm{K}^n;\perp)$ è un gruppo abeliano e che le operazioni date soddisfano le condizioni a), ..., d), e pertanto dotano K^n di una struttura vettoriale su K. Il conseguente spazio vettoriale $(\mathrm{K}^n;\perp,\top)$ dicesi *spazio numerico di ordine* n *su K* e si indica con il simbolo $\overline{\mathrm{V}}_n(\mathrm{K})$, o a volte anche con il solo sostegno K^n.
Vedremo in seguito come e perché tale spazio sia importante.

3) Dato un campo K, l'insieme $\mathrm{K}[x]$ dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in K è uno spazio vettoriale su K rispetto alla ordinaria somma di polinomi (ottenuta sommando i coefficienti dei termini dello stesso grado), ed all'ordinario prodotto di uno scalare per un polinomio (ottenuto moltiplicando quello scalare per ciascun coefficiente del polinomio).
L'elemento neutro rispetto all'operazione interna è il polinomio avente tutti i coefficienti uguali allo zero del campo.

4) Dato un campo K, l'insieme delle matrici su K di fissato tipo $[m,n]$ è uno spazio vettoriale su K rispetto alla somma di matrici (ottenuta sommando i termini aventi uguali indici di riga e di colonna), ed al prodotto di uno scalare per una matrice (ottenuto moltiplicando lo scalare per i singoli elementi della matrice).
Tale spazio sarà indicato con il simbolo $\mathcal{M}_{mn}(\mathrm{K})$. Se è $m=n$, si usa il simbolo $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ al posto di $\mathcal{M}_{nn}(\mathrm{K})$.

5) Sia S un insieme costituito da un solo elemento a. S è spazio vettoriale su un qualunque campo K rispetto alle operazioni banali:
   - $\perp: (a,a) \in \mathrm{S}\times\mathrm{S} \to a \in \mathrm{S}$
   - $\top: (\alpha,a) \in \mathrm{K}\times\mathrm{S} \to a \in \mathrm{S}$

6) Lo spazio $\mathrm{K}[x]$ dell'esempio 3) è un caso particolare, per $n = 1$, dello spazio vettoriale $\mathrm{K}[x_1,...,x_n]$ dei polinomi su K in un qualunque numero (finito) n di indeterminate.

Nell'uso corrente l'operazione interna di spazio vettoriale viene detta *somma* e denotata con il simbolo $+$, mentre l'operazione esterna viene detta *prodotto di uno scalare per un vettore,* ed indicata con il simbolo $\cdot$, che più spesso viene omesso. Così si scriverà:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} \text{ al posto di } \mathbf{v} \perp \mathbf{w}$$

$$\alpha \cdot \mathbf{v} \text{ oppure } \alpha \mathbf{v} \text{ al posto di } \alpha \top \mathbf{v}$$

Il rischio di confusione con le operazioni del campo non esiste, perché sono diversi gli elementi su cui tali operazioni vengono effettuate. Con tale convenzione le condizioni di spazio vettoriale assumono la forma più semplice (ma più ermetica):

1) $(\mathrm{V};+)$ è un gruppo abeliano
2) $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$
3) $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$
4) $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha\beta\mathbf{v}$
5) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

La 2) e la 3) hanno l'aspetto di proprietà distributive (ma la 2) non lo è), e la 4) di una proprietà associativa.

L'elemento neutro di V rispetto alla somma sarà indicato con $\mathbf{0}$, e detto *vettore nullo*. L'inverso di un vettore $\mathbf{v}$ rispetto alla somma (detto anche opposto) sarà indicato con $-\mathbf{v}$.

Assegnati h vettori $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_h$ di V ed h scalari $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_h$ ha senso considerare il vettore $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_h\mathbf{v}_h$, ottenuto applicando reiteratamente le operazioni di spazio vettoriale. Il vettore $\mathbf{v}$ si dirà ottenuto come *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_h$ mediante gli scalari $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_h$.

Proprietà elementari

I) Poiché $(\mathrm{V};+)$ è un gruppo, ogni vettore è regolare rispetto alla somma. Ciò comporta che per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ sia unica la soluzione dell'equazione

$$\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

data da $\mathbf{w} + (-\mathbf{v})$, come si verifica immediatamente.
In particolare, per $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, si ottiene l'unicità del vettore nullo, e, per $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, l'unicità dell'opposto di un vettore.

II) Per ogni vettore $\mathbf{v}$ di V si ha

$$0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Infatti dalle condizioni 2) e 5) segue che

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} = (1+0) \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v}$$

Ciò implica la proprietà in questione per l'unicità del vettore nullo.

III) Per ogni scalare α del campo K si ha

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Infatti dalla condizione 3) segue che

$$\alpha \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{v} + \mathbf{0}) = \alpha \mathbf{v} + \alpha \mathbf{0}$$

da cui deriva la proprietà in questione sempre per l'unicità del vettore nullo.

IV) $\alpha \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$ *oppure* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Supposto infatti $\alpha \mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\alpha \neq 0$, per le condizioni 4) e 5) si ha

$$\mathbf{0} = \alpha^{-1}\mathbf{0} = \alpha^{-1}(\alpha \mathbf{v}) = \left(\alpha^{-1}\alpha\right)\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

La proprietà IV può ottenersi come caso particolare della seguente più generale

V) Per ogni scalare non nullo α, e per ogni vettore $\mathbf{v}$ esiste ed è unica la soluzione dell'equazione

$$\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}$$

Infatti il valore $\alpha^{-1}\mathbf{v}$ è soluzione, perché

$$\alpha\left(\alpha^{-1}\mathbf{v}\right) = \left(\alpha\alpha^{-1}\right)\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

D'altra parte, detta $\mathbf{w}$ una soluzione dell'equazione data, moltiplicando ambo i membri di essa per α^{-1}, dalle condizioni 4) e 5) segue che

$$\alpha^{-1}(\alpha \mathbf{w}) = \alpha^{-1}\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \left(\alpha^{-1}\alpha\right)\mathbf{w} = \alpha^{-1}\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot \mathbf{w} = \alpha^{-1}\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \alpha^{-1}\mathbf{v}$$

Dunque la soluzione è unica.

VI) Per ogni scalare α e per ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha

$$(-\alpha)\mathbf{v} = \alpha(-\mathbf{v}) = -(\alpha \mathbf{v})$$

Ciò segue dall'unicità dell'opposto di un vettore utilizzando le condizioni 2) e 3) e le proprietà II e III. Infatti:

$$(-\alpha)\mathbf{v} + \alpha \mathbf{v} = (-\alpha + \alpha)\mathbf{v} = 0\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\alpha(-\mathbf{v}) + \alpha \mathbf{v} = \alpha(-\mathbf{v} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

3. Sottospazi

Per *sottospazio* di uno spazio vettoriale V su K si intende uno spazio vettoriale V' su K il cui sostegno sia un sottoinsieme di V e le cui operazioni siano le restrizioni di quelle di V rispettivamente a V' × V' e K × V'.

È immediato provare che

Proposizione v.1 *Un sottoinsieme non vuoto V' di V è sostegno di un sottospazio vettoriale se, e solo se, è stabile rispetto alle due operazioni di V, ossia se la somma di vettori di V' appartiene a V' e così il prodotto di uno scalare di K per un vettore di V'.*

Da Fare

Provare che: l'intersezione di una qualunque famiglia non vuota $\{V_i\}_{i\in\Im}$ di sottospazi di V è un sottospazio che sarà detto *sottospazio intersezione* dei V_i.

L'unione di una famiglia di sottospazi $\{V_i\}_{i\in\Im}$ non è invece in generale un sottospazio (perché la somma di vettori appartenenti a sottospazi diversi può non appartenere a nessuno dei V_i). L'unione suddetta è stabile rispetto alla sola operazione esterna di spazio vettoriale. Il più piccolo sottospazio di V che contenga $X = \bigcup_{i\in\Im} V_i$ è l'intersezione di tutti i sottospazi contenenti X, ed è costituito da tutte le possibili somme di vettori appartenenti ai V_i. Chiameremo tale spazio *spazio congiungente* i sottospazi V_i, o anche *spazio somma* dei V_i, e lo denoteremo con il simbolo $\underset{i\in\Im}{+} V_i$.

Tra i sottospazi di V va considerato V stesso ed il sottospazio costituito dal solo vettore nullo. Quest'ultimo sarà detto *sottospazio nullo*.

Esempi

1) Dato un campo K, il sottoinsieme di K^2 costituito dalle coppie del tipo $(\alpha, 0)$ è sostegno di un sottospazio dello spazio numerico di ordine 2 su K. Analoga cosa accade per il sottoinsieme delle coppie del tipo $(0, \alpha)$.

2) Dato un campo K, il sottoinsieme di $K[x]$ costituito dai polinomi di grado non superiore ad h è sostegno di un sottospazio dello spazio dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in K.

3) Dato un campo K, l'insieme $\mathcal{M}_n^s(K)$ delle matrici simmetriche su K e l'insieme $\mathcal{M}_n^a(K)$ delle matrici antisimmetriche su K sono entrambi sottospazi dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(K)$ delle matrici quadrate di ordine n su K.

4. Dipendenza lineare

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K.

Per *sistema* di vettori di V intenderemo una famiglia di vettori $S = \{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Im}$ dove $\Im$ è un qualunque insieme finito o anche infinito.

Se $\Im$ è l'insieme vuoto, si ottiene il sottoinsieme vuoto di V, che dicesi *sistema vuoto*.

? DOMANDA: c'è differenza tra sistema di vettori di V e sottoinsieme di vettori di V?

Sono naturali le definizioni di *sottosistema* e *sovrasistema* di un sistema S.

Diremo che un vettore **v** di V dipende da un sistema non vuoto $S = \{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Im}$ se **v** è combinazione lineare mediante opportuni scalari di un numero finito di vettori di S. Per indicare ciò useremo comunque la scrittura

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Im} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

sottintendendo che è finito il sottoinsieme di $\Im$

$$J = \left\{ j \in \Im \ / \ \alpha_j \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0} \right\}$$

Il vettore nullo di V dipende da ogni sistema non vuoto di vettori di V. Basta considerare $\alpha_i = 0 \ \ \forall i \in \Im$. Tale combinazione lineare si dice *combinazione nulla*.

L'intersezione di tutti i sottospazi contenenti un dato sistema S viene detta *sottospazio generato* da S, ed indicata con il simbolo <S>.

Da Fare

Il sottospazio generato da un sistema non vuoto S è costituito da tutti e soli i vettori che dipendono da S (provare).

Il sottospazio generato dal sistema vuoto è ovviamente il sottospazio nullo (perché?).

Se allora poniamo per definizione che il vettore nullo dipenda dal sistema vuoto, possiamo affermare che

il sottospazio generato da un qualunque sistema S è costituito da tutti e soli i vettori che dipendono da S

o, equivalentemente, che

un vettore dipende da un sistema se, e solo se, appartiene al sottospazio da esso generato.

Esercizi

1. Provare che ogni vettore dello spazio numerico $\overline{\mathrm{V}}_2(\mathrm{K})$ dipende dal sistema $\{(1,0),(0,1)\}$.

2. Ogni vettore di un sistema S dipende da S.

3. Se un vettore **v** dipende da un sistema $S = \{\mathbf{v}_i\}_{i\in\Im}$ e ogni $\mathbf{v}_i$ dipende da un sistema $T = \{\mathbf{w}_j\}_{j\in J}$, allora **v** dipende da T. In particolare un vettore che dipende da una parte di S, dipende da S.

Un sistema di vettori S si dice *linearmente indipendente* (l.i.) se non esiste una combinazione lineare non nulla di vettori di S che dia il vettore nullo. In altre parole S è l.i. o se è il sistema vuoto oppure se l'unica combinazione lineare di vettori di S che dia il vettore nullo è la combinazione nulla. In formule

$$\text{S l.i.} \overset{def}{\Leftrightarrow} \left(\sum \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i \in \Im\right)$$

Osservazione *Dalla definizione segue subito che un sistema di vettori è linearmente indipendente se, e solo se, ogni sua parte finita è linearmente indipendente.*

Un sistema S si dice invece *linearmente dipendente* (l.d.) se non è indipendente, ovvero se è possibile ottenere il vettore nullo come combinazione lineare di vettori di S con scalari non tutti nulli. In formule

$$\text{S l.d.} \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \left(\alpha_i\right)_{i\in\Im} \in \mathrm{K}^{\Im} - \left(0_i\right) \ / \sum \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Esercizi

1. Un sistema S che contiene il vettore nullo è l.d..

2. Un sistema S che contiene due vettori uguali è l.d..

3. Un sistema S che contiene un vettore dipendente dai rimanenti è l.d..

4. Ogni sovrasistema di un sistema l.d. è l.d..

5. Ogni sottosistema di un sistema l.i. è l.i..

6. Un sistema costituito da un solo vettore **w** è l.d. se, e solo se, **w** è il vettore nullo.

L'esercizio 6. prova che uno spazio vettoriale non ridotto al solo vettore nullo possiede sistemi linearmente indipendenti diversi da quello vuoto.

Proposizione v.2 *Un sistema S è linearmente dipendente se, e solo se, esiste un vettore* $\boldsymbol{w}$ *di S che dipende dalla parte rimanente* $S-\{\boldsymbol{w}\}$.

Dim. Sia $\mathrm{S}=\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\Im}$. Si ha che

$$\mathrm{S}\ \text{l.d.}\ \Rightarrow\ \exists\,(\alpha_i)_{i\in\Im}\neq(0_i)\ /\ \sum\alpha_i\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$$

Se è $\alpha_j\neq 0$, $\mathbf{v}_j$ dipende da $\mathrm{S}-\{\mathbf{v}_j\}$. Basta moltiplicare per α_j^{-1}.

Il viceversa è il contenuto dell'esercizio 3..

Lo studente osservi che nel caso che S sia costituito da un solo vettore la proposizione è l'equivalente dell'esercizio 6., tenendo conto che il vettore nullo è l'unico vettore che dipende dal sistema vuoto. ■

Proposizione v.3 *Sia S un sistema indipendente di V, e sia* $S\cup\{\boldsymbol{v}\}$ *dipendente. Allora* $\boldsymbol{v}$ *dipende da S.*

Dim. Supponiamo S non vuoto. Per la dipendenza di $\mathrm{S}\cup\{\mathbf{v}\}$ esistono scalari non tutti nulli $(\alpha_i)_{i\in\Im}$ ed α tali che

$$\sum\alpha_i\mathbf{v}_i+\alpha\,\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

Non può essere $\alpha=0$, altrimenti dovrebbe esserci un $\alpha_j\neq 0$ tale che

$$\sum\alpha_i\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$$

contro il fatto che S è indipendente. Dunque è sicuramente $\alpha\neq 0$. Moltiplicando per α^{-1} si ha allora

$$\sum\alpha^{-1}\alpha_i\mathbf{v}_i+\mathbf{v}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \mathbf{v}=-\sum\alpha^{-1}\alpha_i\mathbf{v}_i$$

cioè **v** dipende da S.

Se S è vuoto, $\mathrm{S}\cup\{\mathbf{v}\}$ è costituito dal solo vettore **v**. Dall'esercizio 6. segue allora che **v** è il vettore nullo, e l'asserto è vero perché si è posto per definizione che il vettore nullo dipende dal sistema vuoto. ■

La proposizione v.3 può anche enunciarsi nella forma:

Proposizione v.3' *Sia S un sistema indipendente di V, e* $\boldsymbol{v}$ *un vettore che non dipende da S, allora* $S\cup\{\boldsymbol{v}\}$ *è linearmente indipendente.*

Il risultato della proposizione v.3' rientra in quello più generale contenuto nella proposizione che segue, e che ci sarà utile in seguito per dimostrare tra l'altro la relazione di Grassmann.

Proposizione v.4 *Siano* $S = \{v_i\}_{i \in \Im}$ *e* $T = \{w_j\}_{j \in J}$ *sistemi di vettori di V linearmente indipendenti e disgiunti. Il sistema unione è linearmente indipendente se, e solo se, lo spazio generato da S e lo spazio generato da T hanno in comune solo il vettore nullo.*

Dim. L'asserto è banale nel caso che uno dei due sistemi sia vuoto. Dimostriamolo nel caso che entrambi i sistemi siano non vuoti.

Supposto che sia $< \mathrm{S} > \cap < \mathrm{T} > = \{\mathbf{0}\}$, si consideri una combinazione lineare di vettori di $\mathrm{S} \cup \mathrm{T}$ che dia il vettore nullo:

$$\mathbf{0} = \sum \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum \beta_j \mathbf{w}_j$$

Allora il vettore $\sum \alpha_i \mathbf{v}_i$ di $< \mathrm{S} >$ coincide con il vettore $-\sum \beta_j \mathbf{w}_j$ di $< \mathrm{T} >$, e quindi, date le ipotesi, è il vettore nullo. Ma l'uguaglianza

$$\sum \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

comporta che sia $\alpha_i = 0$ per ogni indice i, perché S è l.i., e l'uguaglianza

$$\sum \beta_j \mathbf{w}_j = \mathbf{0}$$

comporta $\beta_j = 0$ per ogni indice j, perché T è linearmente indipendente. Pertanto

$$< \mathrm{S} > \cap < \mathrm{T} > = \{\mathbf{0}\} \;\Rightarrow\; \mathrm{S} \cup \mathrm{T} \text{ l.i.}$$

Viceversa, supponiamo che $\mathrm{S} \cup \mathrm{T}$ sia linearmente indipendente, e sia $\mathbf{v}$ un vettore appartenente a $< \mathrm{S} > \cap < \mathrm{T} >$. $\mathbf{v}$ si otterrà allora sia come combinazione lineare dei vettori di S, sia come combinazione lineare dei vettori di T:

$$\mathbf{v} = \sum \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum \beta_j \mathbf{w}_j$$

Si ha allora

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \sum \alpha_i \mathbf{v}_i - \sum \beta_j \mathbf{w}_j$$

Poiché $\mathrm{S} \cup \mathrm{T}$ è linearmente indipendente, lo scalare relativo ad ogni vettore della combinazione di sopra deve essere nullo. Poiché S e T sono disgiunti, un vettore $\mathbf{v}_i$ di S non coincide con nessuno dei vettori $\mathbf{w}_j$ di T, e quindi gli scalari suddetti sono proprio gli α_i e i β_j. In definitiva si ha allora $\alpha_i = 0$ per ogni indice i e $\beta_j = 0$ per ogni indice j. Ciò comporta che $\mathbf{v}$ sia il vettore nullo. Pertanto:

$$\mathrm{S} \cup \mathrm{T} \text{ l.i.} \;\Rightarrow\; < \mathrm{S} > \cap < \mathrm{T} > = \{\mathbf{0}\} \qquad \blacksquare$$

Un sistema S linearmente indipendente dicesi *indipendente massimale* se ogni suo sovrasistema è linearmente dipendente.

Esercizi

1. Provare che un sistema S è linearmente indipendente se, e solo se, ogni vettore che dipende da S vi dipende in modo unico (una delle due implicazioni è banale).

2. Provare che la proposizione v.3' (e quindi l'equivalente v.3) consegue come caso particolare dalla proposizione v.4.

3. Come è fatto uno spazio vettoriale per cui il sistema vuoto è indipendente massimale?

5. Sistemi di generatori. Basi.

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K.

Un sistema S di vettori di V è detto un *sistema di generatori* di V se V coincide con lo spazio <S> generato da S. Nel caso che S sia non vuoto ciò equivale a dire che ogni vettore di V è ottenibile come combinazione lineare di vettori di S.

È banale che ogni spazio vettoriale V ammetta un sistema di generatori: tutti i vettori di V.

Diremo che un sottospazio V' di V (in particolare V stesso) è *finitamente generabile* se ammette un sistema <u>finito</u> di generatori.

Gli spazi numerici di cui agli esempi 1) e 2) sono finitamente generabili, e così pure gli spazi di matrici dell'esempio 4). Non è invece finitamente generabile lo spazio dei polinomi di cui all'esempio 3). (Sono esempi di pag. v.2).

Un sistema S di generatori di V si dice *minimale* se nessun sistema S' contenuto propriamente in S genera V.

Il sistema vuoto è un sistema di generatori per uno spazio vettoriale V unicamente nel caso che V sia costituito dal solo vettore nullo, e per esso costituisce un sistema minimale (non avendo sottosistemi propri) ed indipendente. Più in generale vale la seguente

Proposizione v.5 *Un sistema di generatori di V è minimale se, e solo se, è indipendente.*

Dim. L'asserto è vero se S è il sistema vuoto, ovvero V è lo spazio nullo, per quanto detto in precedenza. Supponiamo V non nullo.

Sia S un sistema di generatori indipendente di V, ed S' un sottosistema proprio di S.

I vettori di $S - S'$ non dipendono da S', altrimenti, per la prop. v.2, S non sarebbe più indipendente. Dunque S' non è un sistema di generatori di V. Per l'arbitrarietà di S', S è minimale.

Viceversa, sia S un sistema di generatori minimale di V.

Nessun vettore **v** di S può dipendere da $S-\{\mathbf{v}\}$, altrimenti tutti i vettori di V dipenderebbero dal sottosistema $S-\{\mathbf{v}\}$ contro il fatto che S è minimale. Pertanto, sempre a norma della prop. v.2, S è un sistema linearmente indipendente. ■

Proposizione v.6 *Un sistema indipendente di V è massimale se, e solo se, è un sistema di generatori.*

Dim. Sia S un sistema indipendente massimale di V.

Detto **v** il generico vettore di V, il sistema $S\cup\{\mathbf{v}\}$ è allora dipendente. Per la prop. v.3 il vettore **v** dipende da S. Per l'arbitrarietà di **v**, S è dunque un sistema di generatori di V.

Viceversa, sia S un sistema di generatori indipendente di V.

Ogni sovrasistema di S è sicuramente dipendente, perché i vettori aggiunti dipendono da S. Dunque S è massimale. ■

Le proposizioni v.5 e v.6 si possono riunire nel seguente fondamentale

Teorema v.7 *Per un sistema di vettori S di uno spazio vettoriale V sono equivalenti le proprietà*
a) S è un sistema di generatori minimale
b) S è un sistema indipendente di generatori
c) S è un sistema indipendente massimale.

Un sistema S di V che goda di una delle proprietà a), b), c) (e quindi di tutte e tre), si dice *base* di V.

Proveremo adesso che ogni spazio vettoriale ammette una base. Ciò risulta dal risultato più forte contenuto nel teorema che segue, che troverebbe posto più appropriato in un corso di Algebra, ma che riportiamo comunque per completezza.

Teorema v.8 *Ogni sistema di vettori linearmente indipendente di uno spazio vettoriale V è contenuto in una base.*

Dim. Sia S un sistema l.i. di V.

Se ogni sovrasistema di S è linearmente dipendente, vuol dire che S stesso è massimale, e dunque una base.

In caso contrario, si consideri l'insieme $\mathcal{S}$ dei sovrasistemi di S che siano linearmente indipendenti, ordinato (parzialmente) rispetto alla relazione di inclusione $\subseteq$. Proviamo che $\mathcal{S}$ è un insieme induttivo, ovvero ogni sua parte totalmente ordinata ammette un elemento maggiorante. Se $\mathcal{T}=\{S_i\}_{i\in\Im}$ è una parte totalmente ordinata di $\mathcal{S}$, il sistema di vettori $\overline{\mathrm{S}} = \bigcup_{i \in \Im} \mathrm{S}_i$ è un elemento di $\mathcal{S}$. Infatti $\overline{\mathrm{S}}$ contiene S ed è linearmente indipendente, perché tale è ogni sua parte finita (provare esplicitamente). Ovviamente $\overline{\mathrm{S}}$ è un maggiorante di $\mathcal{T}$ (ne costituisce l'estremo superiore). Per l'arbitrarietà della parte totalmente ordinata considerata, $\mathcal{S}$ è induttivo. In virtù del lemma di Zorn, $\mathcal{S}$ è dotato di elemento massimale M. M è dunque un sistema di vettori linearmente indipendente contenente S. Se esistesse un sovrasistema di M linearmente indipendente, questo contenendo S apparterrebbe a $\mathcal{S}$, e quindi dovrebbe coincidere con M. Pertanto M non è contenuto propriamente in alcun sistema l.i. di vettori di V, e quindi è un sistema indipendente massimale di V, ovvero una base. ■

Sulle basi di uno spazio vettoriale sussiste il seguente fondamentale

Teorema v.9 *Due basi di uno spazio vettoriale V (finitamente generabile o no) sono equipotenti.*

Tale teorema sarà dimostrato nel caso generale nel corso di Algebra. Noi lo dimostreremo solo nel caso di spazi finitamente generabili deducendolo dal seguente

Lemma v.10 (di Steinitz) *Se* $T = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *è un sistema linearmente indipendente di vettori che dipendono da un sistema* $S = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m\}$*, risulta* $n \le m$.

Dim. Diamo la linea generale, lasciando i dettagli alla lezione o, volendo, allo studente per esercizio.

Si procede per passi.

Si impone che $\mathbf{e}_1$ dipenda da S e, tenendo conto che T è l.i., si ricava che un vettore di S, che senza ledere le generalità possiamo supporre essere $\mathbf{u}_1$, dipende da $(\mathrm{S} - \mathbf{u}_1) \cup \mathbf{e}_1$.

Successivamente si impone che $\mathbf{e}_2$ dipenda da S e, tenendo conto che T è l.i., si ricava che (**passo 1**) $\mathbf{e}_2$ dipende da $(\mathrm{S} - \mathbf{u}_1) \cup \mathbf{e}_1$.

Così continuando, si ottiene al **passo h** che il vettore $\mathbf{e}_{h+1}$ dipende da $\left(\mathrm{S} - \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h\}\right) \cup \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h\}$.

Se fosse $n > m$, sarebbe possibile considerare il vettore $\mathbf{e}_{m+1}$ ottenendo all'emmesimo passo che esso dipende da $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$. Ciò è assurdo, perché un vettore di T non può dipendere da una parte di T essendo T linearmente indipendente. Dunque n non supera m. ■

Proposizione v.11 *Tutte le basi di uno spazio vettoriale V finitamente generabile hanno cardinalità finita.*

Dim. Sia $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ un sistema di generatori finito di V e sia $\mathcal{B}$ una base.

Applicando il lemma di Steinitz al sistema S e ad una qualunque parte finita T di $\mathcal{B}$, si ottiene che $\mathcal{B}$ ha necessariamente cardinalità finita (non superiore ad *m*). ■

Teorema v.12 *Due basi di uno spazio vettoriale V finitamente generabile hanno lo stesso ordine.*

Dim. Basta applicare il lemma di Steinitz a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V, facendo giocare ad una di esse il ruolo di S e all'altra il ruolo di T, e poi scambiando tali ruoli (ciò è ovviamente possibile, perché ogni base è sia un sistema di generatori, sia linearmente indipendente). Si ottiene così $\mathrm{ord}\mathcal{B} \le \mathrm{ord}\mathcal{B}'$ e $\mathrm{ord}\mathcal{B}' \le \mathrm{ord}\mathcal{B}$. Da ciò l'asserto. ■

La cardinalità comune a tutte le basi di uno spazio vettoriale V (teorema v.9) dicesi *dimensione* di V. Essa è un intero non negativo per uno spazio finitamente generabile (teorema v.12); in particolare è 0 (cardinalità del vuoto) se, e solo se, V è costituito dal solo vettore nullo. Se V non è finitamente generabile, la sua *dimensione* è un cardinale infinito.

Esercizi

1. Provare che in uno spazio vettoriale V di dimensione finita *n*:
   a) ogni sistema con più di *n* vettori è linearmente dipendente
   b) ogni sistema indipendente costituito da *n* vettori è una base
   c) ogni sistema di generatori contiene una base
   d) ogni sistema di generatori ha almeno *n* vettori
   e) ogni sistema di generatori costituito da *n* vettori è una base
   f) ogni sottospazio V' di V ha dimensione finita $m \le n$, e si ha $m = n$ se, e solo se, V' coincide con V.

2. Provare che gli spazi vettoriali di cui agli esempi 1) e 2) sono finitamente generabili, e trovarne la dimensione.
3. Determinare una base dello spazio dei polinomi di cui all'esempio 3) provando che esso ha dimensione numerabile.

4. Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V. Provare che l'unione di un sistema di generatori di U con un sistema di generatori di W è un sistema di

generatori per il sottospazio somma $U + W$.

5. Provare che l'insieme $K_1\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ dei polinomi in n indeterminate su K di grado non superiore a 1 è uno spazio vettoriale su K di dimensione $n+1$.

Sia $\mathcal{B} = \left(\mathbf{e}_i\right)_{i\in\mathfrak{I}}$ una base dello spazio vettoriale V non ridotta al solo vettore nullo. L'insieme non vuoto $\mathfrak{I}$ può essere ordinato (teorema di Zermelo) e ciò induce una relazione di ordine in $\mathcal{B}$. Ogni base ordinata di V è detta un *riferimento* di V, e indicata con $\mathfrak{R} = \left(\mathbf{e}_i\right)_{i\in\mathfrak{I}}$ (le parentesi tonde al posto delle graffe).

Assegnato un riferimento $\mathfrak{R} = \left(\mathbf{e}_i\right)_{i\in\mathfrak{I}}$ di V, ogni vettore $\mathbf{v}$ si esprime come combinazione lineare di vettori di $\mathfrak{R}$, perché $\mathfrak{R}$ è un sistema di generatori, con scalari α_i univocamente determinati, perché $\mathfrak{R}$ è linearmente indipendente (cfr. esercizio 1. di pag. v.10), ed anche nell'ordine, perché $\mathfrak{R}$ è ordinato. Pertanto ad ogni vettore $\mathbf{v}$ di V rimane associata una $\mathfrak{I}$-pla ordinata di scalari $\left(\alpha_i\right)_{i\in\mathfrak{I}}$ che sono detti le *componenti* di $\mathbf{v}$ nel riferimento $\mathfrak{R}$.

Quanto sopra è precisato nel seguente teorema che lo studente verificherà per esercizio.

Teorema v.13 *Sia V uno spazio vettoriale non nullo sul campo K. Un riferimento* $\mathfrak{R} = \left(\mathbf{e}_i\right)_{i\in\mathfrak{I}}$ *di V determina un'applicazione biunivoca* $f_{\mathfrak{R}}$ *di V nel sottoinsieme di* $K^{\mathfrak{I}}$ *delle* $\mathfrak{I}$*-ple ordinate* $\left(\alpha_i\right)_{i\in\mathfrak{I}}$ *tali che sia* $\alpha_i \neq 0$ *solo per un numero finito di elementi di* $\mathfrak{I}$*. In particolare, se V è finitamente generabile di dimensione n,* $f_{\mathfrak{R}}$ *è un'applicazione biunivoca di V su* K^n.

Esempio

Per lo spazio dei vettori numerici di ordine n su K un riferimento è costituito dagli n vettori $\mathbf{u}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,\ldots,0)$, ..., $\mathbf{u}_n = (0,0,\ldots,1)$ detti *vettori unitari*. Tale riferimento, detto *canonico* o *naturale,* è particolarmente comodo in quanto le componenti in esso di un vettore numerico $\mathbf{v} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ sono ordinatamente gli stessi scalari $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ componenti di $\mathbf{v}$ come n-pla.

6. Somma diretta di sottospazi. Relazione di Grassmann.

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, e sia $\left\{V_i\right\}_{i\in\mathfrak{I}}$ una famiglia di suoi sottospazi. Sappiamo che un vettore $\mathbf{v}$ del sottospazio somma $\underset{i\in\mathfrak{I}}{+}V_i$ ha un'espressione del tipo

$$\mathbf{v} = \sum_{i\in\Im} \mathbf{v}_i \qquad \mathbf{v}_i \in \mathrm{V}_i$$

Se accade che per ogni vettore di $\underset{i\in\Im}{+}\mathrm{V}_i$ l'espressione di sopra è <u>unica</u>, tale sottospazio si dirà *somma diretta* dei sottospazi V_i, e si indicherà con il simbolo $\underset{i\in\Im}{\oplus}\mathrm{V}_i$. Ciascun V_i si dirà un *sommando diretto* in $\underset{i\in\Im}{\oplus}\mathrm{V}_i$.

La proposizione seguente consente di risparmiare sulla verifica che una somma di sottospazi sia diretta.

Proposizione v.14 *La somma di una famiglia di sottospazi $\{V_i\}_{i\in\Im}$ è diretta se, e solo se, il vettore nullo è ottenibile in un unico modo come somma di vettori appartenenti ciascuno ad un sottospazio della famiglia, ossia se, e solo se, vale l'implicazione*

$$\mathbf{0} = \sum_{i\in\Im} \mathbf{v}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \forall i \in \Im$$

Dim. Se ogni vettore di $\underset{i\in\Im}{+}\mathrm{V}_i$ è ottenibile in un unico modo come somma di vettori appartenenti ai V_i, ciò vale in particolare per il vettore nullo.

Viceversa, l'unicità dell'espressione del vettore nullo comporta l'unicità dell'espressione di un qualunque vettore **v** di $\underset{i\in\Im}{+}\mathrm{V}_i$, in quanto la differenza di due modi di esprimere un vettore **v** fornisce un'espressione del vettore nullo:

$$\mathbf{v} = \sum \mathbf{v}_i = \sum \mathbf{w}_i \quad \Rightarrow \quad \sum\left(\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i\right) = \mathbf{0}$$ ■

Nel caso particolare di due sottospazi valgono le seguenti

Proposizione v.15 *La somma di due sottospazi U e W di V è diretta se, e solo se, essi hanno in comune solo il vettore nullo.*

Dim. Supponiamo sia $\mathbf{0} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{u} \in \mathrm{U}$ e $\mathbf{w} \in \mathrm{W}$. Si ha allora $\mathbf{u} = -\mathbf{w} \in \mathrm{U} \cap \mathrm{W}$. Pertanto è possibile ottenere un'espressione non banale del vettore nullo come somma di un vettore di U con un vettore di W se, e solo se, $\mathrm{U} \cap \mathrm{W}$ possiede vettori non nulli. Dalla prop. v.14 segue l'asserto. ■

Proposizione v.16 *Siano U e W due sottospazi di V ad intersezione nulla. Il sistema unione di una base di U con una base di W è una base per la somma diretta di U e W. In particolare, se U e W sono finitamente generabili, si* *ha* $\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$.

Dim. L'unione di una base di U con una base di W è un sistema di generatori per $U \oplus W$ (cfr. es. 4. di pag. v.13). Dalla prop. v.4 segue poi l'indipendenza di tale sistema.

L'ultima parte dell'enunciato consegue dalla definizione di dimensione. ■

Proposizione v.17 *Ogni sottospazio U di V è un sommando diretto.*

Dim. Sia $\mathcal{B}'$ una base di U. Per il teorema v.8 $\mathcal{B}'$, quale sistema indipendente di V, può essere completata in una base $\mathcal{B}$ di V aggiungendo i vettori di un sistema indipendente $\mathcal{B}''$. Quest'ultimo genera un sottospazio W di V. Si ha allora

$$V = <\mathcal{B}> = <\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''> = U + W$$

Per la proposizione v.4 risulta $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, e quindi, in virtù della prop. v.15, la somma di U e W è diretta. ■

La proposizione v.16 si generalizza a sottospazi ad intersezione non nulla nella forma del seguente

Teorema v.18 *Siano U e W sottospazi di V finitamente generabili. Tra le loro dimensioni, quelle del sottospazio intersezione e del sottospazio somma, sussiste la relazione seguente, detta relazione di Grassmann*

$$\dim U + \dim W = \dim U + W + \dim U \cap W$$

Dim. Diciamo r ed s le dimensioni (finite) di U e W rispettivamente.

Lo spazio intersezione, quale sottospazio di entrambi, è finitamente generabile, e sia h la sua dimensione.

Lo spazio congiungente $U + W$ è anch'esso finitamente generabile (es. 4. di pag. v.13), e sia c la sua dimensione.

Sia ora $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_h\}$ una base di $U \cap W$. In virtù del teorema v.8 $\mathcal{B}$ può essere completata in una base $\mathcal{B}'$ di U

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_h, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{r-h}\}$$

ed in una base $\mathcal{B}''$ di W

$$\mathcal{B}'' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_h, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{s-h}\}$$

Il sistema

$$\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}'' = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_h, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{r-h}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{s-h}\}$$

è un sistema di generatori di $U + W$. Proviamo che è indipendente.

Osserviamo che $\mathcal{B}'\cup\mathcal{B}''$ può essere visto come unione dei sistemi linearmente indipendenti e disgiunti $\mathcal{B}'$ e $\mathrm{T}=\left\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_{s-h}\right\}$.

$<\mathcal{B}'>\cap<\mathrm{T}>$ è costituito dal solo vettore nullo. Infatti ogni vettore di tale intersezione appartiene a $\mathrm{U}\cap\mathrm{W}=<\mathcal{B}>$, e quindi a $<\mathcal{B}>\cap<\mathrm{T}>$. Quest'ultimo sottospazio, per la prop. v.4, è costituito dal solo vettore nullo, essendo $\mathcal{B}\cup\mathrm{T}=\mathcal{B}''$ un sistema l.i., e $\mathcal{B}$ e T disgiunti.

In conclusione $\mathcal{B}'\cup\mathcal{B}''$ è una base di $\mathrm{U}+\mathrm{W}$, e quindi si ha

$$c=h+(r-h)+(s-h)$$

da cui l'asserto. ■

Esercizi

1. Provare che ogni spazio vettoriale V è somma diretta di sottospazi di dimensione uno.

2. Provare che, se K è un campo di caratteristica diversa da 2, lo spazio delle matrici quadrate di ordine n su K è somma diretta del sottospazio delle matrici simmetriche e del sottospazio delle matrici antisimmetriche.

7. Prodotto scalare di vettori numerici

Sia n un intero non inferiore a 1 e sia $\overline{\mathrm{V}}_n(\mathrm{K})$ lo spazio dei vettori numerici di ordine n sul campo K. Dati due elementi di $\overline{\mathrm{V}}_n(\mathrm{K})$ $\mathbf{u}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ e $\mathbf{v}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$, diremo prodotto scalare dei vettori numerici **u** e **v**, e indicheremo con il simbolo $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, l'elemento di K

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_n\beta_n$$

ovvero la somma (in K) dei prodotti (in K) delle componenti di ugual posto dei vettori numerici **u** e **v**.

Associando ad ogni coppia di vettori di $\overline{\mathrm{V}}_n(\mathrm{K})$ il loro prodotto scalare si ottiene un'applicazione

$$s_o:\overline{\mathrm{V}}_n(\mathrm{K})\times\overline{\mathrm{V}}_n(\mathrm{K})\to\mathrm{K}$$

che dicesi *prodotto scalare ordinario* di vettori numerici.

Osserviamo che s_o NON è un'operazione definita in $\overline{\mathrm{V}}_n(\mathrm{K})$, in quanto il risultato non è un vettore, ma uno scalare.

Esempio

Nello spazio dei vettori numerici di ordine 3 sui reali siano $\mathbf{u} = (2,3,7)$, $\mathbf{v} = (-2,1,5)$. Si ha: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 2\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 7\cdot 5 = -4 + 3 + 35 = 34$.

Ricordando che il prodotto di un campo è commutativo, si ha subito la seguente

Proposizione v.19 *Il prodotto scalare di vettori numerici è simmetrico, ovvero per ogni coppia di vettori **u** e **v** si ha*

$$s_o(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = s_o(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$$

Lo studente è invitato a provare per esercizio quanto afferma la seguente

Proposizione v.20 *Per ogni coppia di scalari α e β di K e per ogni terna di vettori **u**, **v**, **w** di $\overline{V}_n(K)$ si ha*

$$s_o(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \alpha s_o(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) + \beta s_o(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$$

La proprietà di cui alla precedente proposizione si esprime dicendo che il prodotto scalare s_o è lineare rispetto alla prima componente.

Dalla simmetria segue poi subito che s_o è lineare anche rispetto alla seconda componente.

Osserviamo esplicitamente che il prodotto scalare di vettori numerici non nulli può essere nullo. Ad esempio è nullo il prodotto scalare dei vettori numerici di ordine 2 (1,0) e (0,1).