PIANO LAUREE SCIENTIFICHE

I VETTORI LIBERI ORDINARI DEL PIANO PER STUDENTI DEL QUINTO ANNO

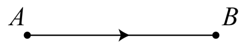
Prof. Sara Dragotti

1. Definizioni

Sia E_2 un piano euclideo, così come viene costruito nei programmi scolastici a partire dagli assiomi di Hilbert, completamento e sistemazione degli assiomi espliciti e non espliciti di Euclide.

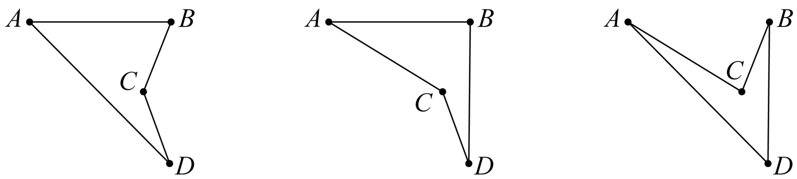
Indichiamo ora con $\mathcal{S}$ l'insieme delle coppie (ordinate) di punti di E_2.

Indicheremo con lettere latine maiuscole i punti di E_2 e con il simbolo AB la coppia ordinata di punti A e B. Non è richiesto che sia $A \neq B$, quindi avremo anche coppie del tipo AA, BB, ... Le coppie di punti distinti saranno disegnate con un tratto di estremi i punti e, a volte, con una freccia rivolta verso il secondo punto della coppia (così come si usa disegnare segmenti orientati). Qui non sempre disegneremo la freccia per semplicità di disegno.



È fondamentale per il seguito la Proposizione 1, per enunciare la quale conviene ricordare allo studente la definizione di quadrilatero.

Definizione 1. *Assegnati quattro punti A, B, C, D a tre a tre non allineati, per quadrilatero $ABCD$ si intende quello di lati AB, BC, CD e DA. In altre parole è importante l'ordine in cui sono scritti i vertici.*

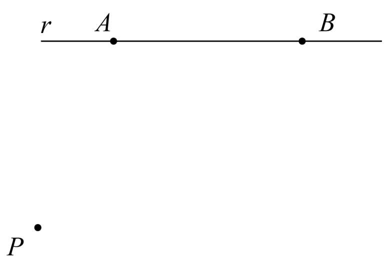


ABCD *ABDC* *ACBD*

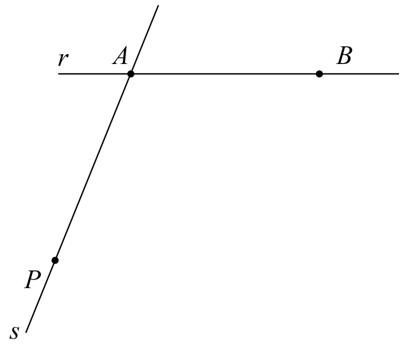
Domanda Esistono altri quadrilateri di vertici A, B, C e D diversi da quelli disegnati sopra?

Proposizione 1. *Per ogni coppia AB con $A \neq B$ e per ogni punto P non appartenente alla retta individuata da A e B esiste un unico punto C tale che il quadrilatero $ABCP$ sia un parallelogramma. La coppia PC si dirà la copia di AB uscente da P.*

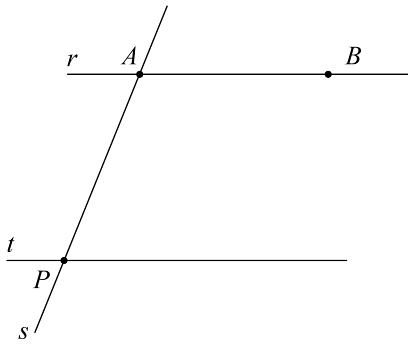
Dim.



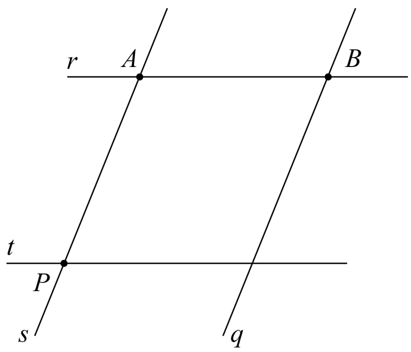
Chiamiamo r la retta individuata da A e B.



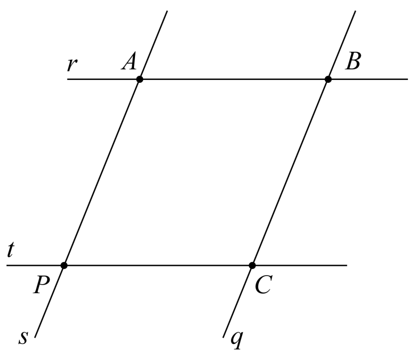
Tracciare la retta s per A e P.



Tracciare la parallela t ad r passante per P.



Tracciare la parallela q ad s passante per B.



Chiamare C il punto comune a t e q.

□

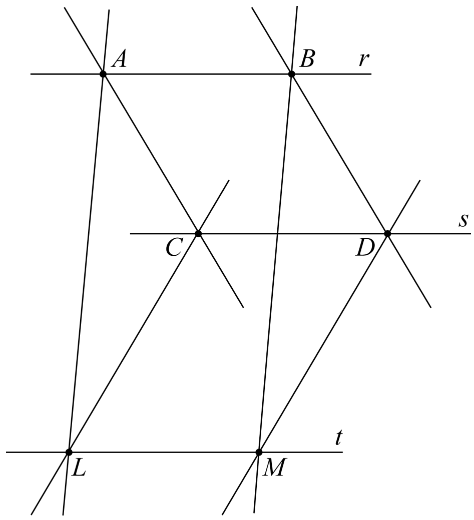
Domande

1. Perché t e q hanno un punto in comune?
2. Perché il parallelogramma $ABCP$ è unico?

Proviamo ora che

Proposizione 2. *La copia di una copia è una copia.*

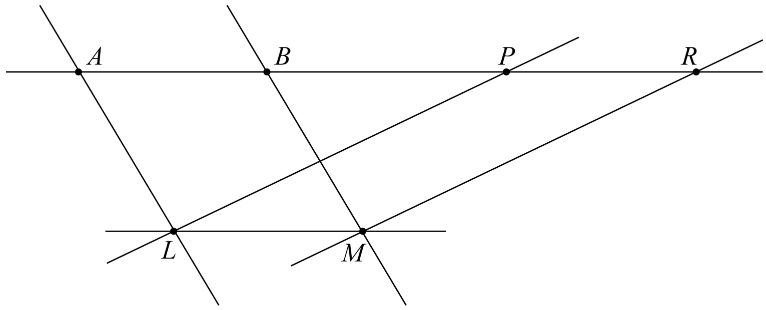
Dim. Sia CD la copia di AB uscente da C, e sia LM la copia di CD uscente dal L. Dunque $ABDC$ è un parallelogramma e $CDML$ è un parallelogramma. Occorre provare che $ABML$ è un parallelogramma. Si veda la figura.



Nel quadrilatero $ABML$ i lati opposti AB ed LM sono paralleli e congruenti, perché entrambi paralleli e congruenti al lato CD. Allora per un noto teorema di geometria euclidea tale quadrilatero è un parallelogramma. □

Domanda Lo studente ricorda come si dimostra il noto teorema di cui sopra?

La Prop. 2 ora provata offre la possibilità di parlare di copia di AB anche uscente da un punto P allineato con A e B. Precisamente si può fare la copia LM di AB uscente da un punto L non allineato con A e B e poi fare la copia di LM uscente da un punto P della retta per A e B.



Osserviamo ancora che, se LM è copia di AB, anche AB è copia di LM, perché il quadrilatero $LMBA$ coincide con il quadrilatero $ABML$. Possiamo allora dire che la coppia AB è copia di se stessa.

Siamo ora in grado di definire nell'insieme $\mathcal{S}$ una relazione che risulti riflessiva, simmetrica e transitiva, ossia una *relazione di equivalenza.* Diremo che:

a) *Una coppia di punti uguali AA è in relazione con ogni altra coppia di punti uguali $(BB, CC, QQ, \dots)$ e con nessuna coppia di punti distinti.*

b) *Una coppia di punti distinti AB è in relazione con la coppia CD $(C \neq D)$ se, e solo se, CD è copia di AB.*

Esercizio Provare (ma è banale) che la relazione sopra descritta è di equivalenza.

Definizione 2. *Ogni classe di equivalenza sarà detta vettore libero ordinario (l.o.) del piano ed indicata con lettere latine minuscole in grassetto $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots)$.*
Se la classe di equivalenza di AB è il vettore l.o. $\mathbf{u}$, diremo che AB è il rappresentante di $\mathbf{u}$ uscente da A, o più semplicemente la copia di $\mathbf{u}$ uscente da A.
La classe di equivalenza delle coppie di punti uguali sarà detta vettore nullo e indicato con $\mathbf{0}$.

L'insieme dei vettori liberi ordinari del piano sarà indicato con $V(E_2)$.

Esercizio Molto spesso lo studente recepisce il senso di una definizione usando le parole della definizione stessa, quindi ha difficoltà a riconoscerla in una frase un po' diversa. Ciò comporta che a volte per rendersi conto di una affermazione deve fare un ragionamento lungo. Ad esempio si renda conto della validità di questa affermazione:

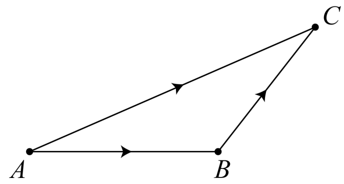
Due vettori liberi ordinari del piano coincidono se, e solo se,
le loro copie uscenti da uno stesso punto coincidono.

2. Somma di vettori liberi ordinari

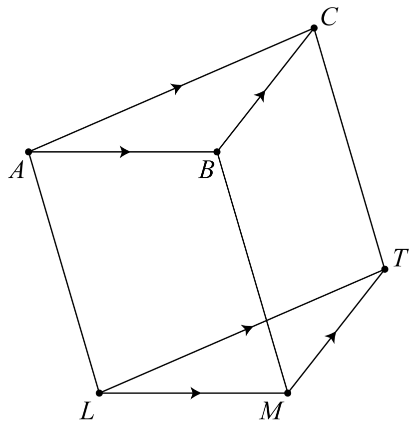
Definizione 3. *Definiamo in $V(E_2)$ una operazione interna, che diremo somma e indicheremo con il simbolo $+$, nel seguente modo:*

a) $\forall \mathbf{u} \in V(E_2)\quad \mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$

b) $\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *consideriamo la copia di* $\mathbf{u}$ *uscente da un punto A, e sia AB, e la copia di* $\mathbf{v}$ *uscente dal punto B, e sia BC.* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ *è il vettore la cui copia uscente da A è AC.*



Affinché la definizione sia ben posta occorre provare l'indipendenza di $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ dalle particolari copie scelte per essi. Si ragioni guardando la figura

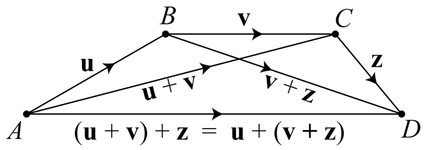


e si deduca che $ACTL$ è un parallelogramma.

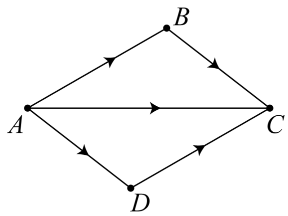
Proposizione 3. *La somma di vettori liberi ordinari del piano gode delle seguenti proprietà:*

1. *è associativa*
$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{z}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{z})\quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z} \in V(E_2)$$
2. *esiste un vettore neutro per essa*
3. *per ogni vettore* $\mathbf{u}$ *esiste un vettore, che indicheremo con* $-\mathbf{u}$*, tale che*
$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$$
4. *è commutativa.*

Dim. Per provare la proprietà 1 diciamo AB la copia di $\mathbf{u}$ uscente da A, BC la copia di $\mathbf{v}$ uscente da B e CD la copia di $\mathbf{z}$ uscente da C. Allora la copia di $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ uscente da A è AC e la copia di $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{z}$ uscente da A è AD.
La copia di $\mathbf{v}+\mathbf{z}$ uscente da B è BD. Allora la copia di $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{z})$ uscente da A è AD.
I vettori $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{z}$ e $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{z})$ coincidono, perché hanno le copie uscenti da A coincidenti.



La proprietà 2 segue subito dalla definizione di somma: per la somma il vettore nullo $\mathbf{0}$ è neutro.
La proprietà 3 segue dal fatto che, se $\mathbf{u}$ è il vettore di copia AB e $\mathbf{v}$ è il vettore di copia BA, si ha che $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ è il vettore di copia AA, ossia il vettore nullo, e $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ è il vettore di copia BB, ossia ancora il vettore nullo.
Per quanto riguarda la proprietà 4, siano AB una copia di $\mathbf{u}$ e BC una copia di $\mathbf{v}$, allora $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ ha per copia AC. Per il vettore $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ scegliamo per $\mathbf{v}$ la copia AD e per $\mathbf{u}$ la copia DC. Si ottiene il vettore la cui copia uscente da A è AC. Pertanto $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.



□

3. Osservazioni e definizioni

Sia $\mathbf{u}$ un vettore l.o. non nullo del piano. Ogni copia AB di $\mathbf{u}$ individua un segmento di retta, e ogni altra copia di $\mathbf{u}$ individua un segmento congruente.

La lunghezza comune di tali segmenti è detta *modulo* o *norma* del vettore $\mathbf{u}$ e viene indicata con il simbolo $\|\mathbf{u}\|$. Si tratta di un numero reale positivo. Il vettore nullo avrà invece modulo nullo.

Tutte le copie di $\mathbf{u}$ sono segmenti contenuti in rette parallele. La direzione di tali rette è detta *direzione* di $\mathbf{u}$. Vettori con la stessa direzione si diranno paralleli.

Domanda La direzione e il modulo di un vettore individuano il vettore?

Ricordiamo che dagli assiomi di ordinamento di Hilbert (non presenti negli *Elementi* di Euclide) segue che ogni retta può essere dotata di due relazioni di ordine totale, ciascuna delle quali si chiama *verso* della retta e può essere decisa a partire da due punti distinti A e B dicendo se A precede o segue B, ovvero considerando una coppia ordinata di punti della retta.

Pertanto assegnare un vettore l.o. del piano comporta l'assegnazione di un verso su ogni retta avente la direzione del vettore. Due vettori paralleli che determinano lo stesso verso si dicono *concordi*.

È facile allora rendersi conto che

Proposizione 4. *Due vettori liberi ordinari del piano non nulli coincidono se, e solo se, sono paralleli, concordi ed hanno lo stesso modulo.*

Domanda I vettori di copie rispettive AB e BA cosa hanno in comune?

4. Prodotto di uno scalare reale per un vettore l.o. del piano

Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. Indicheremo con lettere greche minuscole gli elementi di $\mathbb{R}$, e li chiameremo anche scalari reali (perché il termine scalare si usa in contrapposizione al termine vettore). Considereremo in $\mathbb{R}$ le operazioni interne ordinarie di somma e prodotto, che indicheremo con $+$ e nessun simbolo.

Definizione 4. *Vogliamo ora definire in $V(E_2)$ una operazione esterna con insieme di operatori $\mathbb{R}$ nel seguente modo:*

a) Se $\alpha = 0$ oppure $\mathbf{v}$ è il vettore nullo $\mathbf{0}$, $\alpha\mathbf{v}$ è il vettore nullo:

$$0\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

b) $\forall\alpha \neq 0$, $\forall\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ $\alpha\mathbf{v}$ è il vettore parallelo a $\mathbf{v}$, il cui modulo è $|\alpha|\|\mathbf{v}\|$, e concorde a $\mathbf{v}$ se α è positivo, discorde a $\mathbf{v}$ se α è negativo.

Lo studente proverà facilmente la proposizione seguente:

Proposizione 5. *Il prodotto di uno scalare reale per un vettore l.o. del piano gode delle seguenti proprietà:*

1. è distributivo rispetto alla somma di vettori

$$\alpha\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\,\mathbf{u} + \alpha\,\mathbf{v} \quad \forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V(E_2),\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

2. $(\alpha + \beta)\,\mathbf{v} = \alpha\,\mathbf{v} + \beta\,\mathbf{v} \quad \forall\mathbf{v} \in V(E_2),\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3. $\alpha\,(\beta\,\mathbf{v}) = (\alpha\,\beta)\,\mathbf{v} \quad \forall\mathbf{v} \in V(E_2),\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

4. $1\,\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall\mathbf{v} \in V(E_2)$.

La proprietà 2 è impropriamente detta "il prodotto di uno scalare per un vettore è distributivo rispetto alla somma di scalari". Ma perché "impropriamente"?

Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori liberi ordinari del piano tali che $\mathbf{u} = \alpha\,\mathbf{v}$ con α scalare opportuno. Diremo allora che $\mathbf{u}$ è *multiplo* di $\mathbf{v}$ mediante lo scalare α.

Esercizi

1) Se $\mathbf{u}$ è multiplo di $\mathbf{v}$, è vero che $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$?
2) Se $\mathbf{u}$ è multiplo di $\mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $\alpha \neq 0$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli?
3) Due vettori paralleli sono multipli l'uno dell'altro?
4) Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ vettori liberi ordinari del piano non nulli e non paralleli. Provare che ogni altro vettore l.o. $\mathbf{v}$ è somma di un vettore parallelo ad $\mathbf{u}$ e di un vettore parallelo a $\mathbf{w}$.