7-11 settembre 2020

Studenti@PLS

Scuola Autunnale studenti

Piano Nazionale Lauree Scientifiche

DiSTAR Dipartimento di Scienze della Terra, dell'Ambiente e delle Risorse

Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di SCIENZE CHIMICHE

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"

Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di FISICA "ETTORE PANCINI"

Dipartimento di Scienze Politiche

DIETI

Dipartimento di BIOLOGIA

PLS Virtual Summer School per Studenti (PVS3)

7-11 settembre 2020

Piano Nazionale
Lauree Scientifiche

MATEMATICA

Alcuni esempi di "quotidiana" probabilità

Aniello Buonocore

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"

Università degli Studi Napoli Federico II

aniello.buonocore@unina.it

7 settembre 2020

Università degli Studi di Napoli Federico II

RIEPILOGO RAGIONATO SU ALCUNI CONTENUTI

1) Esperimenti aleatori, eventi e probabilità
2) Probabilità congiunte e condizionate
3) Formula di Bayes

E UN LORO IMMEDIATO UTILIZZO

4) Un gioco tra amici?
5) Dalle leggere alle pesanti?
6) Un problema di sorteggio

Un dispositivo di qualsivoglia natura che fornisce risultati dei quali non si conosce una legge per predirli si dice *aleatorio*. La messa in azione di uno di questi dispositivi viene anche denominata *esperimento aleatorio*.

Tipico esempio di esperimento aleatorio è quello del lancio di un dado (in latino *alea*) il cui risultato, detto *punteggio*, è il numero degli scavi sulla faccia opposta a quella di atterraggio. Si riconosce allora che l'insieme dei suoi possibili risultati è:

$$\Omega = S_6 := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.*$$

Per un esperimento aleatorio, sia esso $\mathcal{E}$, si può allora dire che non è possibile predirne il risultato ma solo che questi deve appartenere ad uno specificato insieme Ω che è detto *spazio campione*. Gli elementi di Ω sono chiamati *punti campione*.

* ________________

Il termine *casuale* si utilizza nella particolare condizione di perfetta simmetria tra i punti campione. Nell'esempio del lancio del dado, l'esperimento è casuale se il dado è *onesto*: nessuna delle facce è preferibile rispetto alle altre.

Nel caso di uno spazio campione con cardinalità finita ogni suo sottoinsieme è detto *evento*; negli altri casi sono eventi solo alcuni sottoinsiemi dello spazio campione.

Ad esempio, nell'esperimento casuale del lancio di un dado, nel seguito indicato con $\mathcal{L}_6$, il sottoinsieme $\{2,4,6\} \subset S_6$ è l'evento che corrisponde al presentarsi di un "punteggio *pari*".

Ulteriori esempi sono:

- $\{2\}$ (ovvero, si presenta il "punteggio 2");
- $\{1,3,5\}$ (ovvero, si presenta un "punteggio *dispari*");
- $\{1,2\}$ (ovvero, si presenta un "punteggio *basso*");
- $\{3,4\}$ (ovvero, si presenta un "punteggio *medio*");
- $\{5,6\}$ (ovvero, si presenta un "punteggio *alto*").

È utile osservare che, ad esempio,

$$\{1,3,5\} = \{2,4,6\}^c,$$

e quindi l'evento "punteggio *dispari*" è il negato dell'evento "punteggio *pari*".

Inoltre,

$$S_6 = \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\}$$

e quindi, come risultato di un lancio si presenta *certamente* o un "punteggio *pari*" oppure un "punteggio *dispari*".

Allo stesso modo,

$$S_6 = \{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \{5,6\}.$$

Infine, come esempio di evento congiunto, l'evento "punteggio *pari basso*" si ottiene come

$$\{2,4,6\} \cap \{1,2\} = \{2\}.$$

ESPERIMENTI **ALEATORI**, **EVENTI** E PROBABILITÀ

In definitiva, per un esperimento aleatorio $\mathcal{E}$ valgono le seguenti affermazioni:

1) non è possibile predirne il risultato ma solo che esso deve appartenere ad uno specificato insieme Ω che è detto *spazio campione*;
2) ad ogni *evento* che si può definire sull'esperimento $\mathcal{E}$ si associa in maniera biunivoca un *sottoinsieme* di Ω;
3) gli eventi si compongono con le usuali operazioni insiemistiche;
4) il negato di un evento si ottiene eseguendo <u>l'operazione di complemento</u> sul sottoinsieme corrispondente;
5) la disgiunzione logica di due eventi si ottiene eseguendo <u>l'operazione di unione</u> dei due sottoinsiemi corrispondenti;
6) la congiunzione logica di due eventi si ottiene eseguendo <u>l'operazione di intersezione</u> dei due sottoinsiemi corrispondenti;
7) nel caso di uno spazio campione Ω a cardinalità finita, tutti i suoi sottoinsiemi sono eventi.

Si consideri un esperimento casuale $\mathcal{E}$ con relativo spazio campione dotato di un numero finito di punti campione perfettamente simmetrici tra loro (nel senso che nessuno di essi ha prevalenza di uscita rispetto a tutti gli altri).

In tali condizioni, la probabilità di un evento può essere calcolata *rapportando la cardinalità dell'insieme corrispondente all'evento considerato alla cardinalità dello spazio campione*.

In simboli, se A è l'evento in questione, Ω lo spazio campione e $\mathbb{P}^{(c)}$ la misura della probabilità, allora

$$\mathbb{P}^{(c)}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}.*$$

* ____________________

Si tratta della definizione *classica* delle probabilità: essa si può applicare solo nel caso di esperimenti casuali.

Quando non è possibile riscontrare simmetrie tra i punti campione la definizione classica non può essere utilizzata. In questi casi, se l'esperimento aleatorio $\mathcal{E}$ può essere ripetuto un numero indefinito di volte nelle medesime condizioni, si può ricorrere alla definizione *frequentista*.

Sia prefissato un intero positivo n e sia A l'evento di cui si vuole valutare la probabilità. In primo luogo, è necessario ripetere n volte l'esperimento $\mathcal{E}$. Poi, indicato con n_A il numero delle volte in cui A si è presentato, si considera il rapporto n_A/n come un'approssimazione della probabilità dell'evento; tale approssimazione migliora al crescere del numero n delle ripetizioni di $\mathcal{E}$. Infine, si pone:

$$\mathbb{P}^{(f)}(A) := {}'\lim_{n\to\infty}{}' \frac{n_A}{n}.$$

La coppia di apici che racchiude il segno di limite rappresenta il fatto che non si tratta di un'operazione nel senso dell'analisi matematica.

ESPERIMENTI ALEATORI, EVENTI E **PROBABILITÀ**

Quando l'esperimento aleatorio non presenta simmetrie tra i punti campione e non è ripetibile un numero indefinito di volte nelle medesime condizioni allora si può ricorrere alla definizione soggettiva della probabilità di un evento.

Tale definizione adotta il contesto delle scommesse (ad esempio, quelle sulle corse dei cavalli) e il suo linguaggio.

La probabilità di un evento A è il prezzo $\mathbb{P}^{(s)}(A)$, compreso tra 0 e 1, che un individuo coerente ritiene equo pagare per ricevere 1 nel caso che A si presenti.

Le condizioni di coerenza ed equità si sono rese necessarie per superare l'obiezione che non si può fondare una teoria sulla base di opinioni personali.

Si osservi che una volta fissata la probabilità di un evento è fissata anche quella del suo negato. Quindi, ci sono sempre almeno due scommesse possibili.

La condizione di coerenza afferma che non deve essere possibile individuare un numero (finito) di scommesse che possano garantisce a chi ne ha fissato le probabilità una vincita (o una perdita) certa.

La condizione di equità è, invece, basata sul concetto di *scommessa equa*: una scommessa è equa quando chi fissa la probabilità dell'evento (*banco*) accetta di scambiare il ruolo con lo scommettitore (*giocatore*) nel caso in cui questi lo dovesse richiedere.

Esperimenti aleatori, eventi e probabilità

Sia $\mathcal{E}$ un esperimento aleatorio, Ω il relativo spazio campione, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ la famiglia degli eventi e $\mathbb{P}$ una qualsiasi delle misura della probabilità precedentemente descritte.

Sussistono le seguenti proprietà.

1) $\forall A \in \mathcal{F},\ 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1;$ (la probabilità di un qualsiasi evento è un numero reale compreso tra 0 e 1)

2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1;$ (l'evento certo ha probabilità 1)

3) $\forall A, B \in \mathcal{F}: A \cap B = \emptyset,\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$ (finita additività)

<u>Queste proprietà costituiscono la base per una trattazione di carattere generale del calcolo delle probabilità.</u>*

* ________________

Nella trattazione di carattere generale la proprietà 3) viene generalizzata alla probabilità dell'unione numerabile di eventi disgiunti; essa diviene *assioma della numerabile additività* che ha come conseguenza il teorema della *finita additività*.

UN GIOCO TRA AMICI?

Cinque persone (*giocatori*) si accordano sulla ripetizione (*partita*) del seguente gioco. Un'urna è riempita con 5 biglie del tutto uguali tra loro tranne che per il colore: 4 sono bianche e 1 è nera. A turno estraggono una biglia dall'urna senza rimpiazzamento. Vince la partita la persona che estrae la biglia nera. Viene stabilito (in base alla *prepotenza*) l'ordine di estrazione vigente per ciascuna partita: G_1, G_2, G_3, G_4, G_5.

Tenendo conto che ci si trova in condizioni di perfetta simmetria tra i punti campione, si richiede di valutare la probabilità che a vincere una partita siano il primo, il secondo e il terzo giocatore.

Si indichi con N l'evento "si estrae biglia nera" e con B l'evento "si estrae biglia bianca". La prima richiesta ha una immediata risposta:

$$\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{5}.$$

Nella formula precedente il pedice 1 alla lettera N si riferisce alla prima estrazione.

UN GIOCO TRA AMICI?

Allo stesso modo si può impostare la risposta alla seconda richiesta:

$$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2).$$

Nella formula precedente i pedici 1 e 2 alle lettere B e N si riferiscono alla prima e alla seconda estrazione, rispettivamente. Si proceda ora in maniera intuitiva seguendo l'ordine delle estrazioni: dopo l'uscita di una biglia bianca l'urna del secondo giocatore contiene 3 biglie bianche e 1 nera, per cui:

$$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}.$$

In maniera analoga, considerando che l'urna del terzo giocatore contiene 2 biglie bianche e 1 nera, si ha:

$$\mathbb{P}(G_3) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Ecco, un esempio nel quale la prepotenza non sortisce alcun beneficio!

Ma come si possono formalizzare le ultime due formule?

UN GIOCO TRA AMICI?

Basta, fornire un pedice, ad esempio A, alla lettera $\mathbb{P}$ per rappresentare la probabilità di un altro evento, sia esso B, quando si è acquisita l'informazione che l'evento A si è già verificato:

$$\mathbb{P}_A(B).$$

Allora, nell'esempio in questione, si può scrivere

$$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5},$$

e, iterando in maniera opportuna il procedimento con gli eventi pedice nel segno di misura di probabilità, si ha

$$\mathbb{P}(G_3) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{5}.$$

In generale, la *legge delle probabilità congiunte* asserisce che:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B).$$

Ovviamente, dal momento che $A \cap B = B \cap A$, si ha anche:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

Dalle due precedenti formulazioni della legge delle probabilità congiunte si ottiene la famosa *formula di Bayes*:

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) \Rightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \cdot \frac{\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

Nel mese di dicembre del 1992 i professori Carla Rossi e Romano Scozzafava inviano ad alcuni dei maggiori quotidiani nazionali una lettera dal provocatorio titolo "Dalle leggere alle pesanti?". Come si intuisce abbastanza facilmente essi intendono "intromettersi" nel dibattito, in quel frangente molto controverso della dialettica politico-sociale, avvertito di grande importanza da parte dell'opinione pubblica sulla punibilità e sul recupero dei tossicodipendenti. Ovviamente, la loro finalità era "solo" quella di smascherare una fallacia nel ragionamento "dalle leggere alle pesanti":

Gli aspetti emotivi prevalgono su quelli razionali, si indaga sulle storie individuali e si interroga il consumatore di droghe per sapere, in particolare, se fumava spinelli (cioè le cosiddette droghe "leggere", come hashish e marijuana) prima di diventare tossicodipendente. La risposta è di solito affermativa, e nei dibattiti questo fatto viene regolarmente usato per sostenere la necessità di proibire anche queste sostanze, che sarebbero la "porta d'ingresso" alla tossicodipendenza.

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

Ora, se anche uno volesse fare l'avvocato del diavolo per dire che i fautori del proibizionismo usassero l'argomento in maniera strumentale, è stupefacente constatare come esso facesse (e fa ancora) molta presa sugli ascoltatori delle trasmissioni televisive e sui lettori dei giornali.

Insegnamento della Probabilità e della Statistica nella Scuola. Perché? Come?

Più in generale, nella loro vita quotidiana, le persone fanno scelte ed esprimono giudizi intuitivi secondo euristiche spesso non consapevoli e molto distanti da forme di razionalità scientifica (si vedano per esempio [3][2] e [4][3]).

D'altra parte si può assumere che una buona conoscenza delle basi del calcolo delle probabilità e della statistica potrebbe certo aiutarci a prendere decisioni più consapevoli e più vantaggiose. O almeno a renderci conto della distanza di molte delle nostre intuizioni da fatti scientificamente accertati. Con vantaggio nostro e di tutti. Ecco perché è importante sviluppare queste conoscenze nelle scuole (si pensi, per esempio, alla piaga sociale della dipendenza dal gioco).

Dalla Prefazione di S. Rao al Volume della Scuola Estiva per i docenti della Scuola Secondaria del Secondo Ciclo di Istruzione "La Matematica dell'Incerto – Insegnamento della Probabilità e della Statistica"

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

L'argomentazione con la quale gli autori della lettera demoliscono il ragionamento "dalle leggere alle pesanti" è di tipo paradossale:

… e alle stesse persone (tossicodipendenti) intervistate fosse stata posta la domanda "ti piaceva mangiare le caramelle da bambino?" la percentuale di risposte affermative certamente sarebbe stata maggiore di quella ottenuta con la domanda sul consumo delle droghe leggere. Ma nessuno si sogna di mettere in relazione caramelle e droghe pesanti.

Alla fine della lettera gli autori forniscono una spiegazione più tecnica per la non validità del ragionamento "dalle leggere alle pesanti":

> *In conclusione, quindi, è fra i consumatori di spinelli che andrebbe fatta un'indagine per vedere quanti diventeranno consumatori di droghe "pesanti", e non viceversa: ma è stata mai fatta una tale indagine?*

Dalle Leggere alle Pesanti?

Da parte mia, faccio osservare che il *disegno sperimentale* (ovvero la procedura per ottenere i dati), che è del tipo

“tempo corrente” - “qualche anno prima”,

contribuisce molto a ingenerare la convinzione della validità del ragionamento “dalle leggere alle pesanti”:

… le persone sono indotte a credere che è agli attuali tossicodipendenti che bisogna chiedere se prima fumassero gli spinelli.

È invece molto più difficile far accettare la modalità di raccolta dei dati proposta dai professori Rossi e Scozzafava:

… è agli attuali fumatori di spinelli che tra qualche anno bisognerà chiedere se nel frattempo siano diventati tossicodipendenti.

Ma, in effetti, tale procedura non è necessaria, come si può evincere con il ragionamento sviluppato nelle prossime due diapositive.

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

In effetti, indicata con Ω la popolazione di riferimento (ben individuata e circoscritta prima dell'avvio dell'indagine), la tesi che i fautori del proibizionismo volevano promuovere è che la probabilità che un fumatore di spinelli (evento S) diventi tossicodipendente (evento T) fosse molto vicina a 1 e molto più grande della probabilità di essere tossicodipendente nella totalità della popolazione Ω. In simboli:

$$\cancel{\mathbb{P}(T) \ll \mathbb{P}_S(T)} \cong 1.$$

Invece, il loro ragionamento è stato solo quello di "produrre" solo il risultato dell'indagine, ovvero la probabilità

$$\mathbb{P}_T(S)$$

al tempo corrente <u>e affermare che tale quantità è "impressionantemente" grande (ovvero, abbastanza vicino a 1).</u>

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

Applicando la formula di Bayes, si ottiene

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \cdot \frac{\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\mathbb{P}_S(T) = \mathbb{P}(T) \cdot \frac{\mathbb{P}_T(S)}{\mathbb{P}(S)} = \mathbb{P}(T) \cdot \alpha.$$

In altri termini, la probabilità che un fumatore di spinelli diventi tossicodipendente è proporzionale alla probabilità di essere tossicodipendente nella totalità della popolazione Ω. Il fattore di proporzionalità α è il rapporto tra la probabilità che un tossicodipendente sia stato fumatore di spinelli e la probabilità di essere un fumatore di spinelli nella totalità della popolazione Ω.

Allora, dal momento che gli utenti in carico annualmente dai "SerD" sono tra 10^5 e $2 \cdot 10^5$ su una popolazione di 6 decine di milioni di persone, se anche si ponesse $\alpha = 3$, l'affermazione

$$\mathbb{P}(T) \ll \mathbb{P}_S\,(T) \cong 1$$

<u>non è corretta</u> sia nel senso del molto maggiore che nel senso del circa uguale.

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si vogliono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che siano estratti un maschio e una femmina?

Prima di procedere all'individuazione di una soluzione è necessario concordare sul significato dell'indicazione "a sorte" e, successivamente determinare una procedura operativa (l'esperimento *casuale*) in grado di soddisfare il requisito.

1. Materiali: cartoncini (uguali) numerati su una faccia, biglie numerate e urna, bigliettini e sacchetto, ecc.

2. Primo passo: *mischiata* (per assicurare le "simmetrie").

3. Secondo passo: estrazioni sequenziali o in blocco.

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si devono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che siano un maschio e una femmina?

SOLUZIONE: estrazioni sequenziali senza rimpiazzamento

– L'evento $E_{10,15}$ del quale bisogna calcolare la probabilità è indicato nella frase "i rappresentanti di classe estratti sono un maschio e una femmina".

– Indicando con M l'evento "viene estratto uno studente" e con F l'evento "viene estratta uno studentessa", l'evento $E_{10,15}$ si riscrive nella forma :

$$E_{10,15} = (M \wedge F) \vee (F \wedge M).$$

– Per rendere maggiormente evidente l'ordine con il quale si susseguono le due estrazioni si possono utilizzare i pedici 1 e 2:

$$E_{10,15} = (M_1 \wedge F_2) \vee (F_1 \wedge M_2).$$

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si devono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che siano un maschio e una femmina?

SOLUZIONE: estrazioni sequenziali senza rimpiazzamento

- I due eventi congiunti $M_1 \wedge F_2$ e $F_1 \wedge M_2$ risultano essere *mutuamente esclusivi* e quindi la disgiunzione $\vee$ deve essere interpretata nel senso *esclusivo*.

- Per utilizzare il linguaggio insiemistico, si interpreti $M = \{m_1, m_2, \cdots, m_{10}\}$, $F = \{f_1, f_2, \cdots, f_{15}\}$ e $\Omega = M \cup F$; ne segue che:

$$E_{10,15} = (M_1 \cap F_2) \sqcup (F_1 \cap M_2).^*$$

* ____________________

Qui, $M_1 = M \times \Omega$, $M_2 = \Omega \times M$, $F_1 = F \times \Omega$ e $F_2 = \Omega \times F$. Inoltre, per brevità, qui il simbolo $\sqcup$ rappresenta l'unione di insiemi aventi intersezione vuota.

- In definitiva, bisogna determinare:

$$p(10,15) := \mathbb{P}\left(E_{10,15}\right) = \mathbb{P}[(M_1 \cap F_2) \sqcup (F_1 \cap M_2)].$$

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si devono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che siano un maschio e una femmina?

SOLUZIONE: <u>estrazioni sequenziali senza rimpiazzamento</u>

– Per l'assioma della finita additività, si ha:

$$\mathbb{P}\left(E_{10,15}\right) = \mathbb{P}(M_1 \cap F_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap M_2).$$

– La legge delle probabilità congiunte consente di ottenere la risposta al problema:

$$p(10{,}15) = \mathbb{P}\left(E_{10,15}\right) = \mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}_{M_1}(F_2) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(M_2)$$

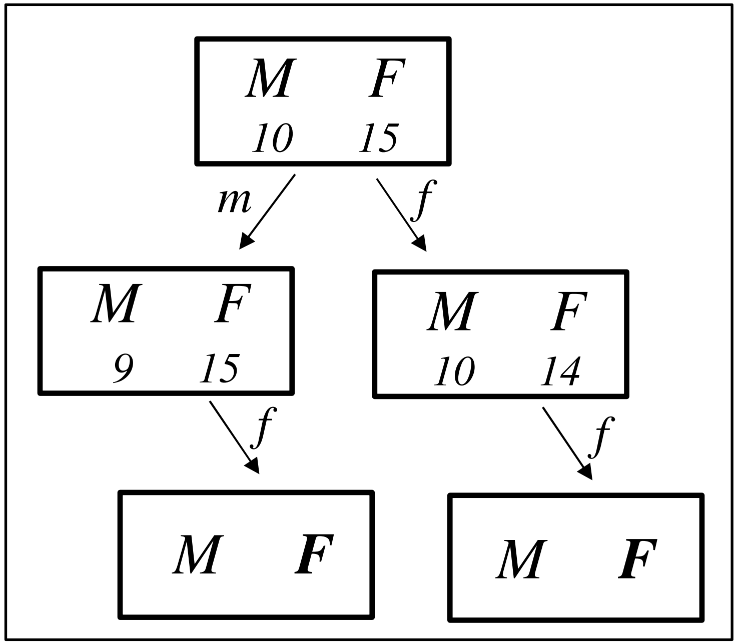
$$= \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} + \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} = 2\,\frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}.\,*$$

* ____________________

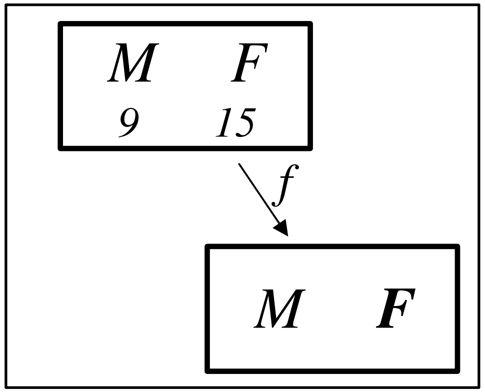
Valutazione delle probabilità degli eventi coinvolti come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili per la "simmetria" tra gli elementi degli insiemi M, F e $M \cup F$.

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Nelle rappresentazioni grafiche seguenti, l'evento di cui si vuole valutare la probabilità è in entrambi i casi F_2 (ossia che esca il nome di una studentessa nella seconda estrazione): la differenza di significato è che nella parte b) è già noto che nella prima estrazione è uscito il nome di uno studente.



a)



b)

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si devono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che siano un maschio e una femmina?

SOLUZIONE: <u>estrazioni in blocco</u>

- In questa prospettiva l'interpretazione insiemistica degli eventi gioca un ruolo ulteriore.

- I casi favorevoli sono i sottoinsiemi aventi 2 elementi dell'insieme $M \cup F$ che sono costituiti da un elemento di M e da un elemento di F.

- I casi favorevoli sono $10 \cdot 15$. Infatti, M ha 10 elementi e quindi da esso si possono ottenere 10 singoletti. F ha 15 elementi e quindi da esso si possono avere 15 singoletti. Ogni singoletto di M unito con un qualsiasi singoletto di F costituisce un caso favorevole.

- I casi possibili sono, invece, <u>tutti</u> i sottoinsiemi di 2 elementi appartenenti all'insieme $M \cup F$.

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si devono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che siano un maschio e una femmina?

SOLUZIONE: estrazioni in blocco

– Per ottenere un caso possibile basta scegliere due elementi distinti di $M \cup F$. Osservando che l'ordine di elencazione dei due elementi è ininfluente, i casi possibili sono allora $(25 \cdot 24)/2$.

– In definitiva, risulta:

$$p(10{,}15) = \mathbb{P}\left(E_{10,15}\right) = \frac{10 \cdot 15}{(25 \cdot 24)/2} = 2\,\frac{10 \cdot 15}{25 \cdot 24} = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}.$$

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si devono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che siano un maschio e una femmina?

Perché proprio 0,5? Ovvero, come è collegato tale valore di probabilità al numero degli studenti e al numero delle studentesse? Ci sono altre coppie di interi positivi per le quali la probabilità richiesta vale 0,5? Per generalizzare il problema, si denoti con f il numero delle studentesse e con $m = f - n$ ($n \in \mathbb{N}_+$, insieme dei naturali non nulli) il numero degli studenti.

Quindi, n rappresenta la differenza tra il numero delle femmine e il numero dei maschi. Ripercorrendo, ad esempio, la linea della soluzione dell'estrazione in blocco, si ottiene la seguente equazione:

$$p(m,f) \coloneqq \mathbb{P}\left(E_{m,f}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\frac{mf}{(m+f)(m+f-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 2f = 0.$$

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si devono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che siano un maschio e una femmina?

Da essa, escludendo la soluzione che fornisce un valore negativo per n, si ottiene:

$$n = \frac{\sqrt{1+8f}-1}{2}.$$

Tabella dei valori assunti da n in corrispondenza di $1 \leq f \leq 60$

f	n	f	n	f	n	f	n
1	**1**	16	5.178908	31	7.389867	46	9.104686
2	1.561553	17	5.35235	32	7.51561	47	9.208244
3	**2**	18	5.520797	33	7.63941	48	9.310708
4	2.372281	19	5.684658	34	7.761356	49	9.412114
5	2.701562	20	5.844289	35	7.881527	50	9.512492
6	**3**	**21**	**6**	**36**	**8**	51	9.611874
7	3.274917	22	6.152067	37	8.116844	52	9.710289
8	3.531129	23	6.300735	38	8.232125	53	9.807764
9	3.772002	24	6.446222	39	8.345903	54	9.904326
10	**4**	25	6.588723	40	8.458236	**55**	**10**
11	4.216991	26	6.728416	41	8.569179	56	10.09481
12	4.424429	27	6.86546	42	8.67878	57	10.18878
13	4.623475	**28**	**7**	43	8.787088	58	10.28193
14	4.815073	29	7.132169	44	8.894147	59	10.37428
15	**5**	30	7.262087	**45**	**9**	60	10.46586

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si devono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che siano un maschio e una femmina?

Osservazioni

1. La coppia $f = 1$ e $n = 1 \Rightarrow m = 0$ e, quindi, è da scartare.
2. Gli altri valori di f che conducono a valori di n interi positivi (riportati in grassetto nella tabella) costituiscono una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$. Ad esempio, $f_1 = 1$, $f_2 = 3$ e $f_6 = 21$.
3. Anche il valore $f = 15$ appartiene alla successione: $f_5 = 15$.
4. Risulta $f_{\mathbf{2}} = f_1 + \mathbf{2}$, $f_{\mathbf{3}} = f_2 + \mathbf{3}$, $f_{\mathbf{4}} = f_3 + \mathbf{4}$, …
5. Si può congetturare che la successione sia assegnata *per ricorrenza*:
$$f_1 = 1 \quad \text{e} \quad \forall n \geq 2, \qquad f_n = f_{n-1} + n.$$
6. Il fatto che $m = f - n \Leftrightarrow f = m + n$ significa che anche il numero m degli studenti appartiene alla successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$.

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si devono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che siano un maschio e una femmina?

Per ottenere la formulazione esplicita del termine generale della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ si può osservare in primo luogo che:

$$\forall k \geq 2,\ f_k = f_{k-1} + k \Leftrightarrow f_k - f_{k-1} = k.$$

Quindi, riscrivendo la seconda formulazione per $1 \leq k \leq n$, si ha:

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & 1 \\ f_2 - f_1 & = & 2 \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n-1} - f_{n-2} & = & n-1 \\ f_n - f_{n-1} & = & n. \end{array}$$

Infine, la somma membro a membro delle precedenti equazioni fornisce:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, \qquad f_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si devono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che siano un maschio e una femmina?

In altri termini f_n è la somma dei primi n interi e le coppie di interi (m, f) per le quali risulta

$$p(m, f) = \frac{1}{2}$$

sono le coppie consecutive degli elementi della successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$:

$$\forall n \geq 2, \quad (f_{n-1}, f_n).$$

Si riconosce, in particolare che

$$(10{,}15) = (f_4, f_5).*$$

*

Si dice che f_n è il *numero triangolare* di posto n.

UN PROBLEMA DI SORTEGGIO

Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si devono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che siano un maschio e una femmina?

PER CONTINUARE

a) La verifica della congettura $f_{\boldsymbol{n}} = f_{n-1} + \boldsymbol{n}$.

b) La determinazione della formula di Gauss per f_n.

c) La relazione tra gli elementi della successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e la terza colonna del triangolo di Tartaglia.

d) La relazione tra gli elementi della successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e il numero dei sottoinsiemi di cardinalità 2 ottenuti da un insieme di cardinalità n.

e) La relazione tra due numeri triangolari consecutivi e un numero quadrato.

f) $\vdots$