Scheda 2: integrazione numerica

Esercitazione numerica con l'uso di Excel. Risolvere l'equazione del moto di un oscillatore armonico semplice $a = -\left(\frac{k}{m}\right)x$ non è banale perché l'accelerazione e la posizione non sono numeri ma funzioni del tempo. Possiamo però determinare una soluzione numerica per la legge oraria del moto $x = x(t)$ e tracciare il grafico approssimato del suo andamento nel tempo. Supponiamo, per fissare le idee, di avere un moto lungo una retta e siano v_m e a_m rispettivamente la velocità e l'accelerazione medie in un intervallo di tempo Δt, cioè:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad e \quad a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Dalle espressioni sopra riportate si può facilmente vedere che, noto il valore dell'accelerazione a_m nell'intervallo Δt e della velocità iniziale del corpo in moto, si può ricavare la sua velocità finale attraverso l'espressione: $v_f = v_i + a_m\,\Delta t$ e, nota la velocità v_m nell'intervallo Δt e la posizione iniziale del corpo in moto, si può ricavare la posizione finale dopo tale intervallo attraverso l'espressione $s_f = s_i + v_m\,\Delta t$. Se adesso approssimiamo il valore della velocità media con la media aritmetica tra v_f e v_i e supponiamo che nell'intervallo Δt il corpo si muova con questa velocità costante otteniamo:

$$s_f = s_i + \left(\frac{v_f + v_i}{2}\right)\Delta t = s_i + \frac{v_i \Delta t}{2} + \frac{(v_i + a_m \Delta t)\Delta t}{2} = s_i + v_i \Delta t + \frac{a_m (\Delta t)^2}{2}$$

Questa espressione mostra che la posizione finale del corpo può essere calcolata sulla base dell'ipotesi che nell'intervallo Δt il corpo si sia mosso con accelerazione costante pari al valore dell'accelerazione media[1]. Molto spesso in un moto reale è difficile conoscere il valore dell'accelerazione media in un intervallo, in quanto l'accelerazione è funzione del tempo, della posizione e della velocità. Si può allora calcolare un valore approssimato di v_f sostituendo al valore dell'accelerazione media a_m il valore dell'accelerazione nel punto iniziale dell'intervallo a_i e l'espressione di v_f viene così modificata:

$$v_f = v_i + a_i\,\Delta t.$$

Se adesso pensiamo di dividere l'intervallo di tempo totale T in cui vogliamo studiare il moto in tanti intervalli uguali di ampiezza Δt, e cioè calcolare le grandezze che ci interessano agli istanti: **0,** $\boldsymbol{t_1, t_2, \dots\ t_i, t_{i+1}, T,}$ con $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, si hanno quindi le seguenti espressioni iterative che consentono di calcolare i valori di $v(t)$ e $s(t)$ in tutti gli istanti in cui è stato diviso l'intervallo di tempo totale:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + a(t_i)\Delta t$$

$$s(t_{i+1}) = s(t_i) + v(t_i)\Delta t + a(t_i)\frac{(\Delta t)^2}{2}$$

Questa procedura può essere eseguita con un foglio elettronico come quello del tabulato A.

[1] Altri metodi utilizzano approssimazioni diverse di v_m.

◇	A	B	C	D	E	F	G
1	**Legge oraria dell'oscillatore armonico**						
2					a=−(k/m)x		
3	m=	0,5	kg				
4	k=	100	N/m				
5	x_0=	0,1	m	t	x	v	a
6	v_0=	0	m/s	=0	=$B$5	=$B$6	=-$B$8*E6
7	dt=	0,01	s	=D6+$B$7	=E6+F7*$B$7	=F6+G6*$B$7	=-$B$8*E7
8	k/m=	=B4/B3	N/m^2	=D7+$B$7	=E7+F8*$B$7	=F7+G7*$B$7	=-$B$8*E8
9				=D8+$B$7	=E8+F9*$B$7	=F8+G8*$B$7	=-$B$8*E9
10				=D9+$B$7	=E9+F10*$B$7	=F9+G9*$B$7	=-$B$8*E10

Il calcolo è relativo a un oscillatore armonico con $m = 0{,}5\ kg$ e $k = 100\,\frac{N}{m}$ lasciato partire da $x = 0{,}1\ m$ con velocità iniziale nulla.

Prova tu. Sfruttando il metodo di Eulero che ti è stato precedentemente illustrato costruisci il grafico (v-x), in cui la velocità v rappresenta la variabile dipendente e la coordinata x quella indipendente, sia per l'oscillatore armonico libero che per quello smorzato[2].

[2] Se non avete familiarità con il foglio elettronico Excel, prima di affrontare il problema di un corpo soggetto ad una forza variabile e quindi ad una accelerazione variabile, risolvete il problema più semplice del corpo che si muove con una accelerazione costante, cioè soggetto ad una forza costante.