L'insegnante-ricercatore di matematica: appunti di viaggio

Margherita Guida

[1] I.S.I.S "Elena di Savoia"- NA

[2] Università degli Studi di Napoli "Federico II"

PLS Matematica e Fisica 2025: Giocare, Scoprire, Insegnare!

Istituto di Analisi Superiore - Napoli, 15 Maggio 2025

Exploit di due ragazzi Usa (1997)

Esempi di uso "smart" del computer:

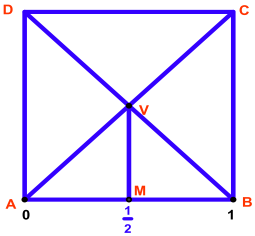
Una soluzione imprevista a un problema ben noto da duemila anni:

"Dividere un segmento in un dato numero di parti uguali"

Possiamo suddividere il segmento unitario con il metodo classico delle proiezioni parallele (basato sul Teorema di Talete) oppure usare il seguente metodo ricorsivo (versione semplificata dell'algoritmo scoperto in classe da due ragazzi USA):

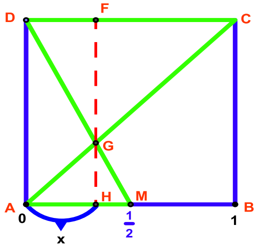
Dato l'intervallo [0;1] di estremi A e B per determinare la posizione di $\frac{1}{3}$

- Costruiamo il quadrato $ABCD$ di lato 1
- Tracciamo le diagonali DB e AC
- Dal punto di incontro V delle diagonali tracciamo un segmento VM perpendicolare ad AB
- Il punto M sarà il punto medio di AB e quindi M corrisponderà ad $\frac{1}{2}$



Per determinare la posizione di $\frac{1}{3}$

- Congiungiamo M con D
- Dal punto di incontro G di DM con AC tracciamo la perpendicolare GH ad AB e la perpendicolare GF ad CD



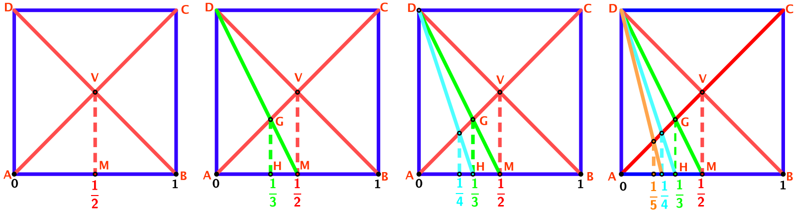
Per la similitudine dei triangoli AGM e CGD otteniamo:

$$GH : GF = AM : CD$$

posto $AH = x$ abbiamo

$$x : (1-x) = \frac{1}{2} : 1 \implies x = \frac{1}{3}$$

Procedendo in modo analogo otteniamo $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ del segmento unitario.



Litchfield D.C., Goldenheim D.A., Dietrich C.H. (1997), *Euclid Fibonacci Sketchpad*, The Mathematics Teacher, Vol. 90, N.1, 8-12.

• Guida, M., Romano E., Sbordone C. (2019). *L'importanza delle definizioni in Matematica*. Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche, Napoli, vol. LXXXVI, pp. 147-64, Giannini Editore.

• Guida, M., Sbordone, C. (2016). *Sull' insegnamento delle frazioni nella scuola secondaria*. In: Orizzonti Matematici. Tra didattica e divulgazione. A cura di: Salvatore Cuomo, Salvatore Rionero, Carlo Sbordone. MEMORIE DELL'ACCADEMIA DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE /SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI, pp.105-126, Napoli: Giannini Editore.

Problemi isoperimetrici

“Il classico Problema Isoperimetrico”

risale all’antichità (Problema di Didone, IX secolo a.C.- fondazione di Cartagine) e chiede di **determinare, fra tutte le curve chiuse del piano di uguale lunghezza l, la curva che contiene l’ area massima.**

Si può dimostrare che questo problema è equivalente al suo duale:

determinare, fra tutte le curve chiuse del piano che contengono uguale area, la curva che ha lunghezza minima.

Fra tutti i triangoli aventi assegnato perimetro p, quello equilatero ha area massima

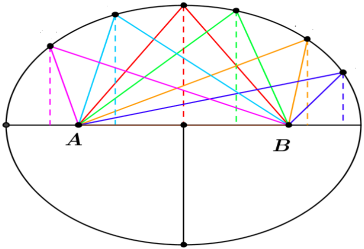
Per provare il Teorema , prima esaminiamo il caso in cui sono fissati perimetro e lunghezza di un lato:

Il triangolo isoscele ha area massima fra tutti i triangoli di uguale base AB aventi lo stesso perimetro:

cioè

tra tutti i triangoli con lo stesso perimetro di base AB, il triangolo isoscele ha altezza massima

Per disegnare tutti i triangoli ABC di base AB e aventi lo stesso perimetro, basta prendere il vertice C sull'ellisse di fuochi A e B.



Tra questi ha altezza massima il triangolo isoscele.

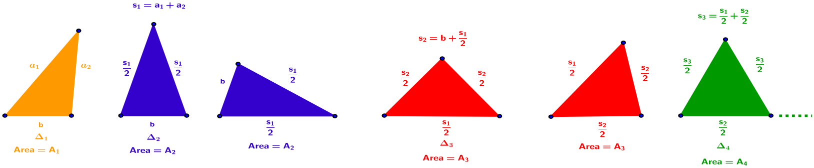
Teorema

Fra tutti i triangoli aventi assegnato perimetro p, quello equilatero ha area massima.

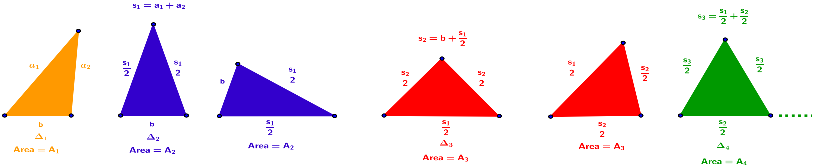
Dimostrazione con Metodo delle approssimazioni successive.

Sia Δ_1 un triangolo non equilatero di perimetro P e area A_1, vogliamo dimostrare che se Δ è il triangolo equilatero di perimetro P e area A , allora $A > A_1$.

Costruiremo una successione di triangoli $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ con lo stesso perimetro P e tali che ogni triangolo ha area maggiore di quella del triangolo precedente, al crescere di n i triangoli Δ_n, diventeranno di forma sempre più uguale a quella del triangolo equilatero di perimetro P.



Partiamo dal triangolo Δ_1 di base di lunghezza b e lati di lunghezza a_1 e a_2, e poniamo $s_1 = a_1 + a_2$:



poi costruiamo il triangolo isoscele Δ_2 di base di lunghezza b e lati di lunghezza $\frac{s_1}{2}$ e poniamo $s_2 = b + \frac{s_1}{2}$, poi costruiamo il triangolo isoscele Δ_3 di base di lunghezza $\frac{s_1}{2}$ e lati di lunghezza $\frac{s_2}{2}$ e poniamo $s_3 = \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{2}$. Procedendo in questo modo costruiamo i triangoli isosceli Δ_{n+1} di base di lunghezza $\frac{s_{n-1}}{2}$ e lati di lunghezza $\frac{s_n}{2}$ dove $s_n = \frac{s_{n-2}}{2} + \frac{s_{n-1}}{2}$.

Detta A_n l'area del triangolo Δ_n, per il Teorema (sui triangoli isoperimetrici con base fissata) si ha che ogni triangolo della successione ha area maggiore dell'area del precedente, cioè $A_{n+1} > A_n$ per ogni n. Inoltre, al crescere di n, i triangoli Δ_n diventano di forma sempre più regolare, in quanto le differenze tra s_{n+1} e s_n diventano sempre più piccole:

$$s_2 - s_1 = b - \frac{s_1}{2}$$

$$s_3 - s_2 = -\frac{1}{2}(b - \frac{s_1}{2})$$

$$s_4 - s_3 = \frac{1}{2^2}(b - \frac{s_1}{2})$$

. . . .

$$s_{n+1} - s_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(b - \frac{s_1}{2})$$

Poichè la successione a secondo membro tende a zero per $n \to \infty$, anche la successione a primo membro tende a zero, precisamente si ha:

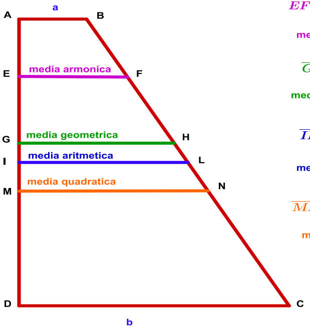
$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} - s_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{2} = \frac{P}{3}, \qquad \lim_{n\to\infty} A_n = A$$

e quindi fra tutti i triangoli di perimetro P il triangolo equilatero ha area massima.

• Guida, M. (2018). *Problemi isoperimetrici*. Atti Accademia Pontaniana, Napoli, N.S., vol. LXVII, pp. 103-114, Giannini Editore.

Disuguaglianze tra le medie

Se rappresentiamo in un trapezio rettangolo di basi **a** e **b**, con diversi colori i segmenti corrispondenti alle medie tra due numeri **a** e **b**, ritroviamo geometricamente le disuguaglianze che sussistono tra queste medie.



$$\overline{EF} = \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1}$$

media armonica

$$\overline{GH} = \sqrt{ab}$$

media geometrica

$$\overline{IL} = \frac{a+b}{2}$$

media aritmetica

$$\overline{MN} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

media quadratica

$$min\{a,b\} \leq m_{-1} \leq m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq max\{a,b\}$$

.

- Guida, M. (2018). *Disuguaglianze tra medie numeriche: una descrizione geometrica.*, Federico II nella Scuola - Un percorso didattico dalla scuola all'università . A cura di: R. Gervasio, M.R. Posteraro, C. Sbordone. Quaderni dell'Accademia Pontaniana, n. 65, pp. 71-84, Napoli: Officine Grafiche Francesco Giannini e Figli S.p.a.

Coniche

Teorema di Dandelin

- . Dardano U., Di Gennaro R.