



PLS MATEMATICA E FISICA 2025: *GIOCARE, SCOPRIRE, INSEGNARE!*

Artefatti e manipolazioni: i recipienti di Emma Castelnuovo

Anna Merinio e Marco Marino

Via Mezzocannone, Napoli 8 maggio 2025

Perché la Geometria

Proviamo a ragionare e discutere intorno a certe questioni di carattere geometrico.

Perché insegnare la Geometria?

Qual è il suo valore formativo?

Perché la Geometria

La geometria ha un valore paradigmatico sul piano metodologico per ogni disciplina scientifica.

Può essere considerata come **un atteggiamento attivo**, mirante a descrivere in modo preciso e coerente gli oggetti e l'ambiente, e a spiegare certe relazioni degli oggetti tra loro e con il soggetto.

Fare Geometria

*È un primo passo con il quale un soggetto umano cerca di porsi razionalmente in rapporto con gli oggetti che lo circondano.
[...] un soggetto cerca di descrivere gli oggetti in modo preciso e obiettivo e di dedurre con sicurezza certe conseguenze da poche premesse.*

(C.F. Manara)

Geometria e esperienza

I concetti della matematica, e in particolare quelli della geometria, nascono dalla **esperienza**, la quale causa percezioni attinenti a diverse aree sensoriali. Nel caso della geometria, possiamo riferirci a due ambiti sensoriali dai quali la nostra fantasia trae le immagini, e la nostra mente i concetti della geometria.

Area delle sensazioni visive

Area delle sensazioni tattilo-muscolari

Geometria e esperienza

Area delle sensa

**atteggiamento attivo,
mirante a descrivere in
modo preciso e coerente
gli oggetti e l'ambiente, e
a spiegare certe relazioni
degli oggetti tra loro e con
il soggetto**

Area delle sen

ne nascono da osservazione di
particolari configurazioni; da
particolari fenomeni fisici
che conducono alla
relazioni di similitudine tra
(... scala...)

azioni che derivano dalla
manipolazione degli oggetti,
che giudichiamo *duri* o *molli*,
lisci o *scabri*, *pieghevoli* o
deformabili.

Geometria e esperienza

A mio avviso occorre accostare ad ogni passo la teoria all'esperienza, la scienza alle applicazioni. Si eviterà in tal modo di perdere il senso del reale che è tanto necessario nella vita e nella scienza. Se soffochiamo nei nostri allievi il senso pratico e lo spirito di iniziativa noi mancheremo al maggiore dei nostri doveri.

G.Castelnuovo, 1912

Geometria e esperienza

L'attenzione alla *realtà* intesa da Emma Castelnuovo è altra cosa nell'inserire il concreto, a volte pretestuoso, o un concreto troppo ripulito dagli elementi complessi del reale.

Per Emma la *realtà* è la presenza del pensiero e del ragionamento matematico nell'ambito della natura o dell'arte, della vita umana e delle invenzioni tecnologiche, è la realtà che ci circonda e che cerchiamo di dipanare nella sua complessità.

Artefatti

Per *artefatti (cognitivi)* si intende un insieme di oggetti e dispositivi che facilitano lo sviluppo di specifici apprendimenti. (S. Papert)

L'uso di manufatti cognitivi è necessario perché, prevede che il processo di apprendimento sia un processo di costruzione di rappresentazioni più o meno corrette e funzionali del mondo con cui si interagisce.

L'idea di base è che la mente, per apprendere, ha bisogno di costruire e maneggiare materiali, oggetti reali, dispositivi. Ciò vale a qualunque età, si sia bambini, adolescenti o adulti.

Artefatti *dinamici*

I materiali di Emma partono dal presupposto teorico che il ragazzo presta maggiormente la sua attenzione su materiali *dinamici* che possono subire trasformazioni, che possono essere manipolati: l'attenzione non è più sul materiale stesso ma sull'operazione che si deve compiere per agire su di esso.

Queste caratteristiche facilitano il passaggio dal concreto all'astratto, perché contemplano anche “casi limite” e “passaggi all'infinito”.

Artefatti e Mediazione Semiotica

In TMS si definisce **potenziale semiotico** di un artefatto la doppia relazione che può instaurarsi tra un artefatto, i significati personali che emergono dal suo utilizzo per svolgere un compito (attività strumentale) e i significati matematici evocati dal suo utilizzo e riconoscibili come matematica da un esperto (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Assumere una prospettiva semiotica significa focalizzarsi sulla produzione di segni e su processi di trasformazione di questi segni, considerando questa trasformazione come un'evidenza dell'apprendimento.

Artefatti e Mediazione Semiotica

La TMS, riconosce un ruolo centrale nei segni, sia come prodotti, sia come mezzi, e interpreta la costruzione di un sapere come **l'evoluzione di una conoscenza da significati radicati nell'uso dell'artefatto verso significati esplicitamente riconosciuti come coerenti con i significati matematici**: partendo dall'emergere del potenziale semiotico, testimoniato dalla produzione da parte degli studenti di specifici segni, il cui significato si riferisce principalmente all'utilizzo dell'artefatto (segni artefatto), l'intervento attivo del docente promuoverà la loro evoluzione verso i segni matematici attesi.

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:

LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

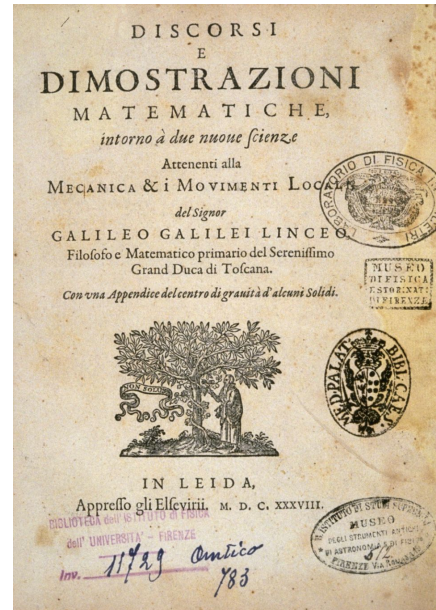
Sessione ordinaria 2024 Seconda prova scritta

Questio 4

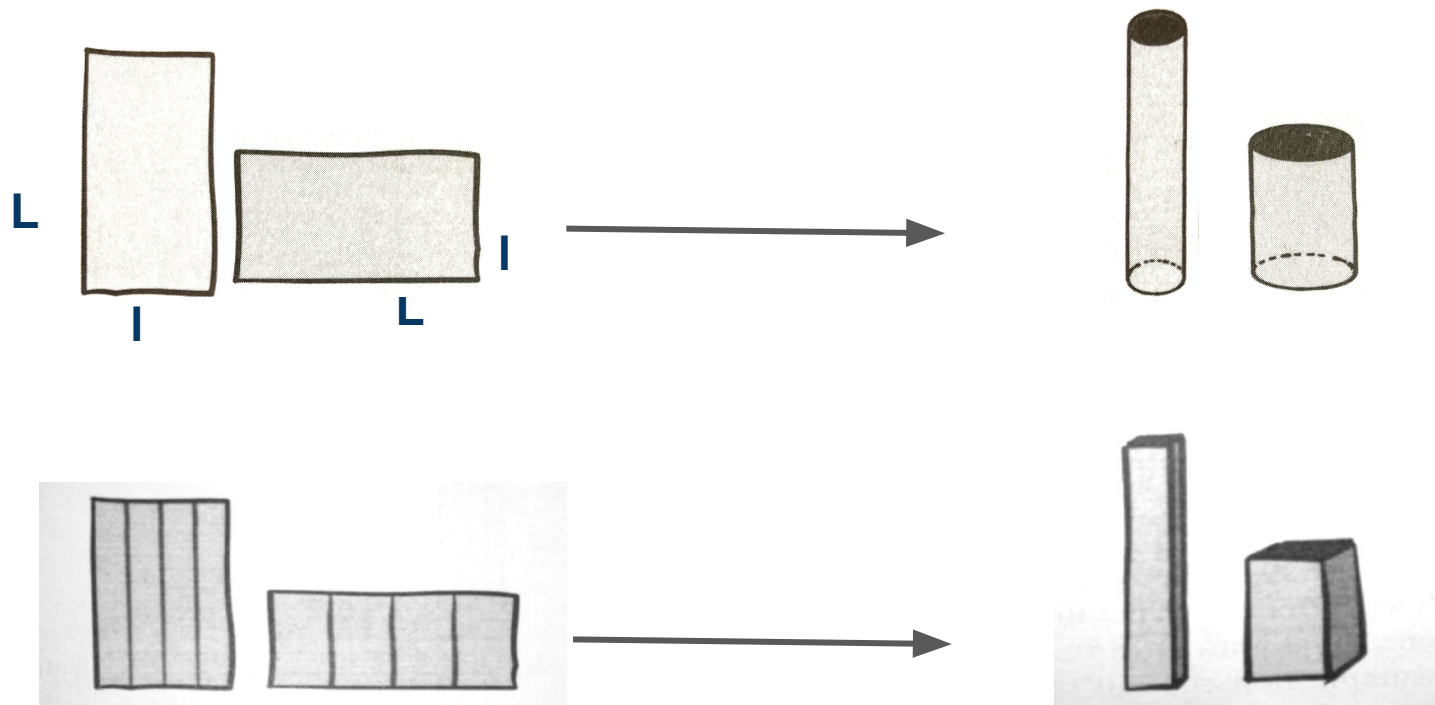
Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V , stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

... intanto Galileo, a proposito di aree e volumi...

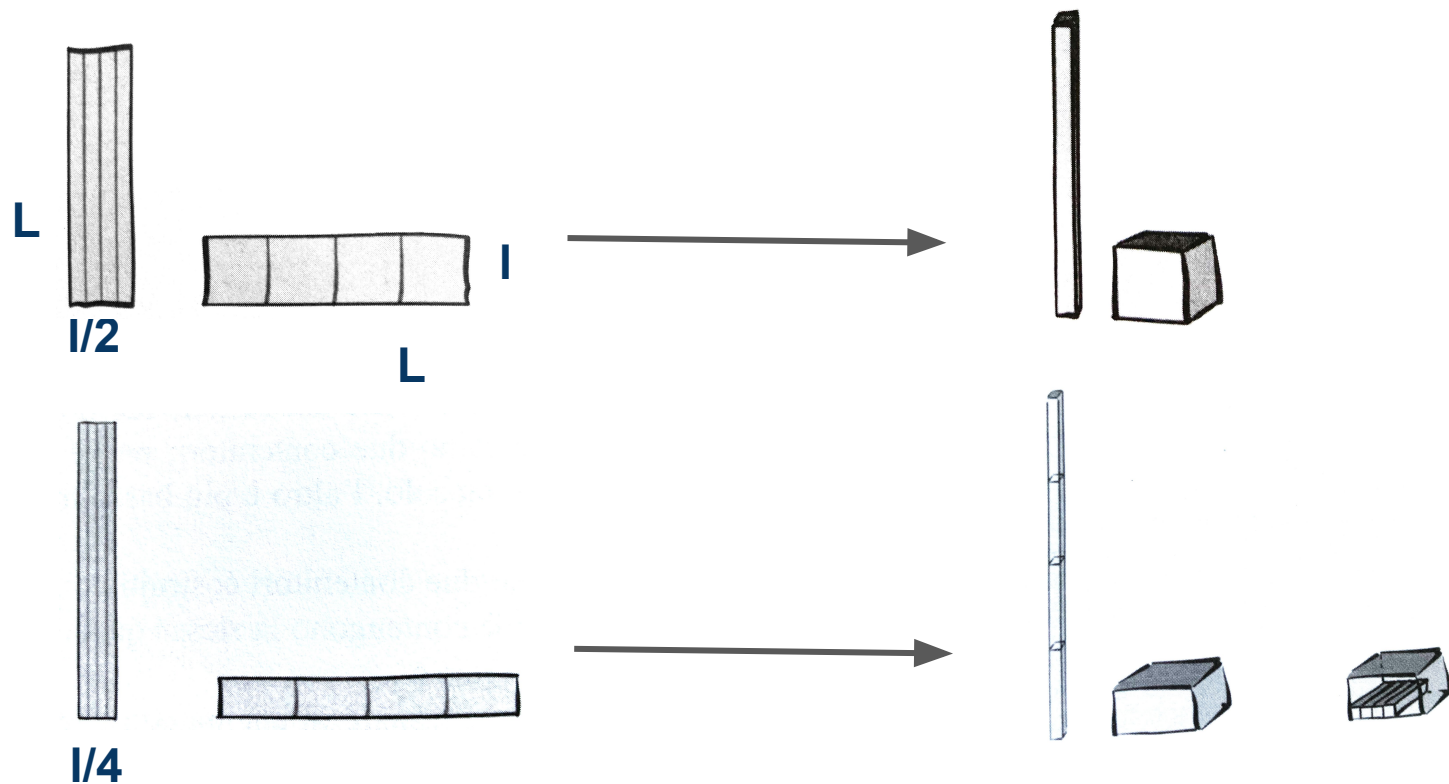
Di qui s'intende la ragione d'un accidente che non senza maraviglia vien sentito dal popolo; ed è, come possa essere che il medesimo pezzo di tela più lungo per un verso che per l'altro, se se ne facesse un sacco da tenervi dentro del grano, come si costuma fare con un fondo di tavola, terrà più servendoci per l'altezza del sacco della minor misura della tela e con l'altra circondando la tavola del fondo, che facendo per l'opposito



I recipienti di Emma



I recipienti di Emma



Calcolo e andamento dei volumi

$$L = 29,7 \text{ cm}$$

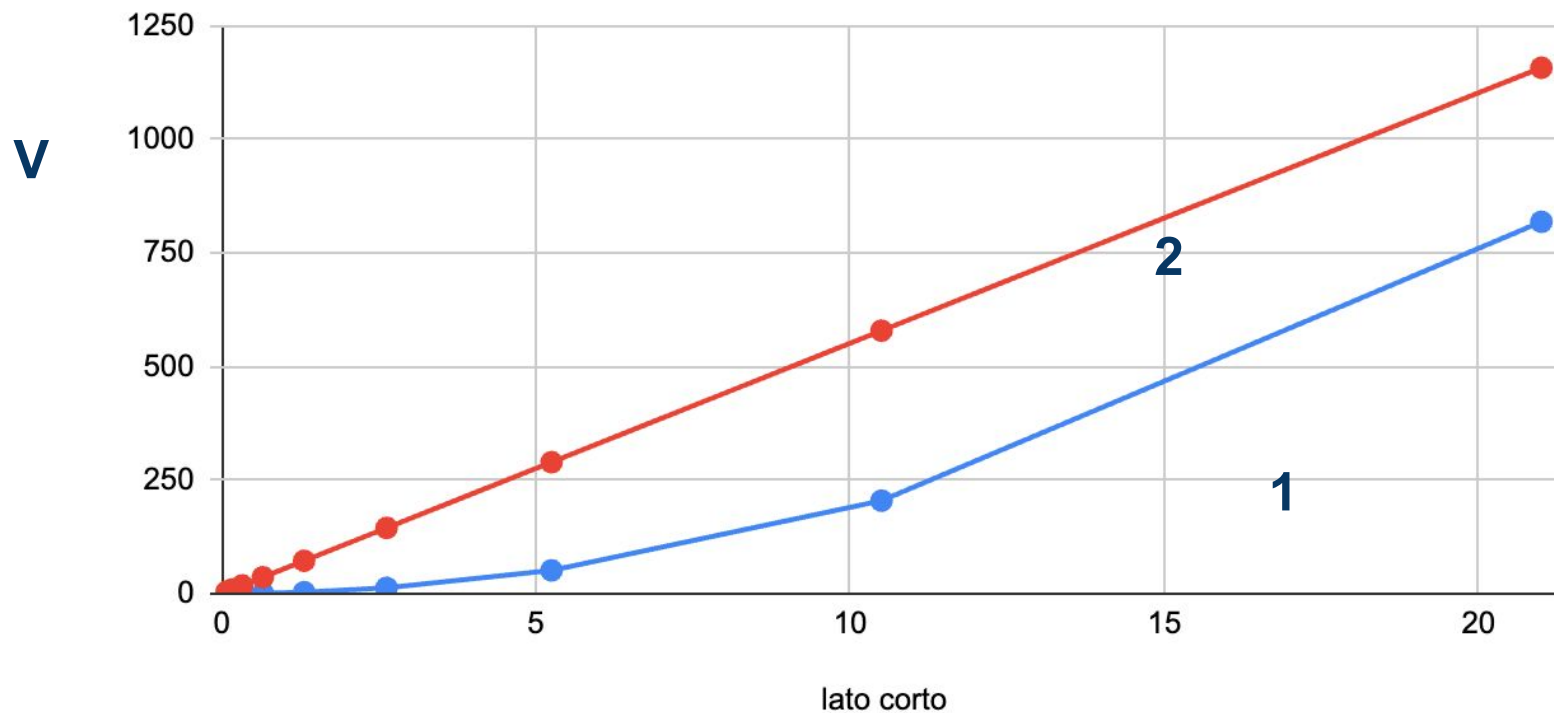
$$l = 21 \text{ cm}$$

$$V_1 = A_b \cdot h = \left(\frac{l_i}{4} \right)^2 \cdot L$$

$$V_2 = A_b \cdot h = \left(\frac{L}{4} \right)^2 \cdot l_i$$

L	$l_i = l_{(i-1)/2}$	V_1	V_2
29,7	21	818,6	1157,8
	10,5	204,7	578,9
	5,3	51,2	289,4
	2,6	12,8	144,7
	1,3	3,2	72,4
	0,7	0,8	36,2
	0,3	0,2	18,1
	0,16	0,05	9,04
	0,08	0,012	4,52

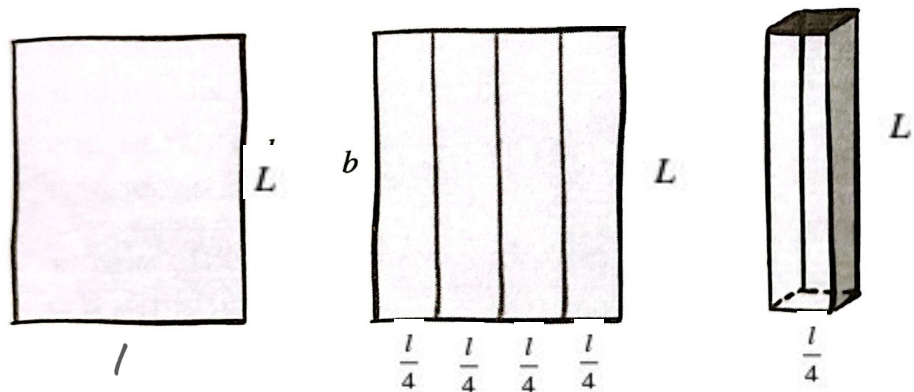
Calcolo e andamento dei volumi



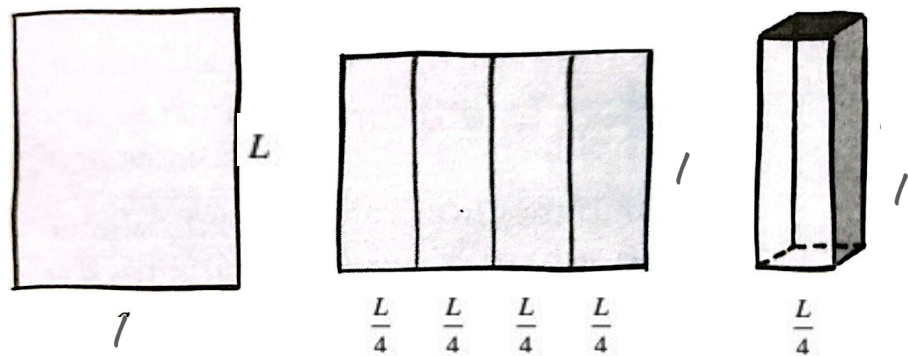
Calcolo e andamento dei volumi: confronto tra infinitesimi

$$\frac{\lim_{l_i \rightarrow 0} \left(\frac{l_i}{4} \right)^2 \cdot L}{\lim_{l_i \rightarrow 0} \left(\frac{L}{4} \right)^2 \cdot l_i} = \lim_{l_i \rightarrow 0} \left(\frac{l_i^2}{L \cdot l_i} \right) = \lim_{l_i \rightarrow 0} \left(\frac{l_i}{L} \right) = 0$$

Calcolo e andamento dei volumi



$$V_1 = \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{4} \cdot L = l \cdot \frac{lL}{16}$$



$$V_2 = \frac{L}{4} \cdot \frac{L}{4} \cdot l = L \cdot \frac{lL}{16}$$

Calcolo e andamento dei volumi

Si ha allora:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{L \cdot \frac{lL}{16}}{l \cdot \frac{lL}{16}} = \frac{L}{l}$$

e questo ci dice che il rapporto dei volumi dei due parallelepipedi è proprio uguale al rapporto tra le dimensioni del foglio.

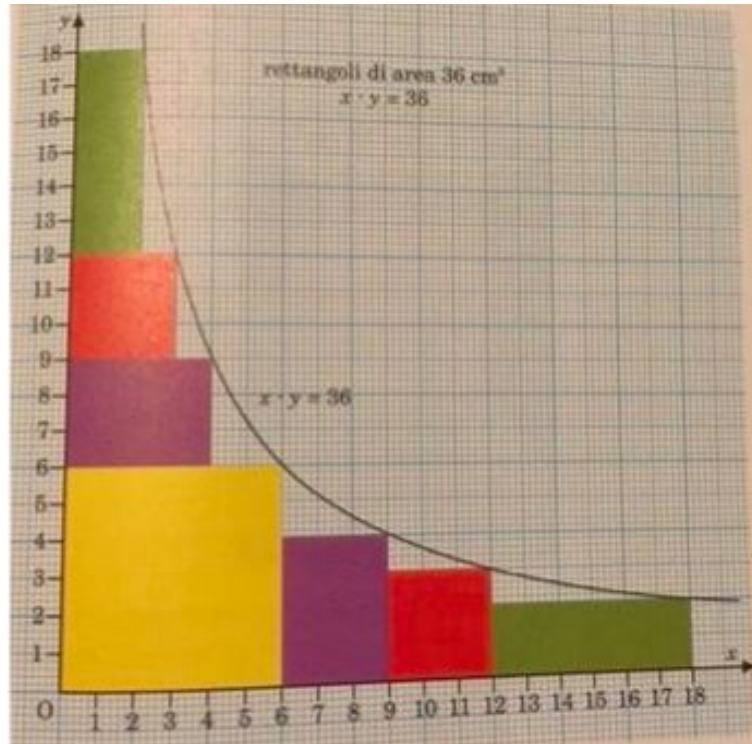
Si capisce allora che se le dimensioni del rettangolo differiscono di molto, altrettanto avverrà per i volumi; mentre il rapporto tra i volumi sarà vicino a 1 se è piccolo il divario tra le due dimensioni, e i volumi saranno ovviamente uguali nel caso di un foglio quadrato.

Il problema di ottimizzazione nel piano

Tra tutti i rettangoli di uguale area trovare quello di minimo perimetro e stabilire se ha anche la diagonale minima.

*Disegnate e ritagliate tutti i rettangoli equivalenti di area 36 cm^2 .
Una volta ritagliati, disponete i rettangoli a libretto su un foglio quadrettato su cui siano indicati due assi perpendicolari.*

Il problema di ottimizzazione nel piano

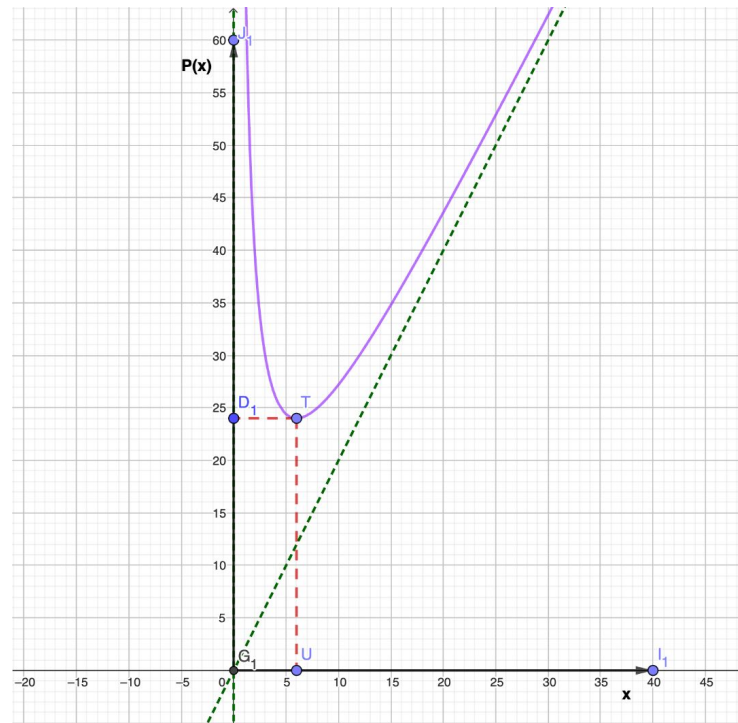
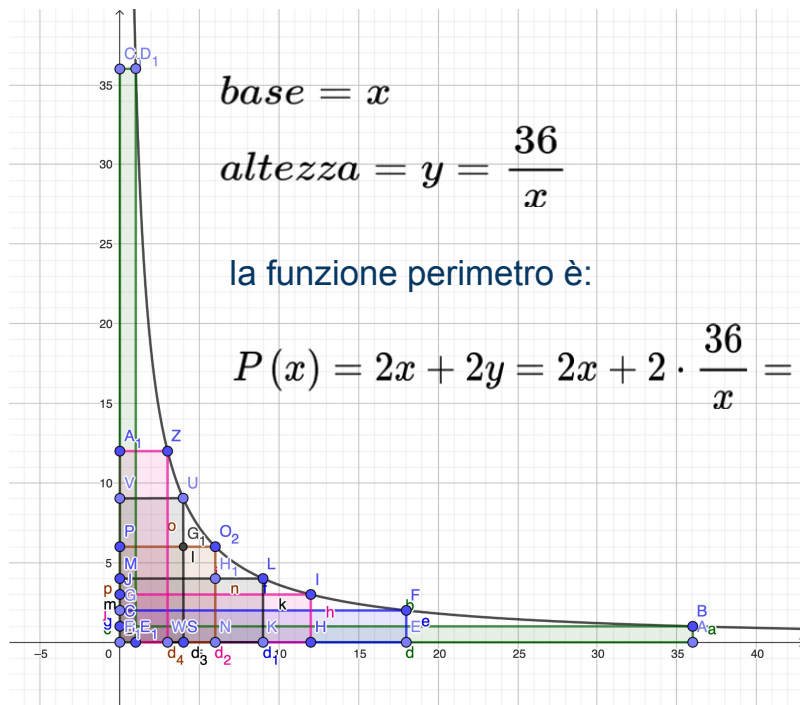


In figura, i rettangoli dello stesso colore hanno le stesse dimensioni: per es. in verde, x è uguale a 18 cm e $y = 2$ cm.

Si osserva che i vertici liberi dei rettangoli stanno su un arco di curva, un'**iperbole**, la cui equazione è $x \cdot y = 36$

Il perimetro dei rettangoli cambia e il **perimetro minimo** appartiene al **quadrato**.

La funzione *perimetro*

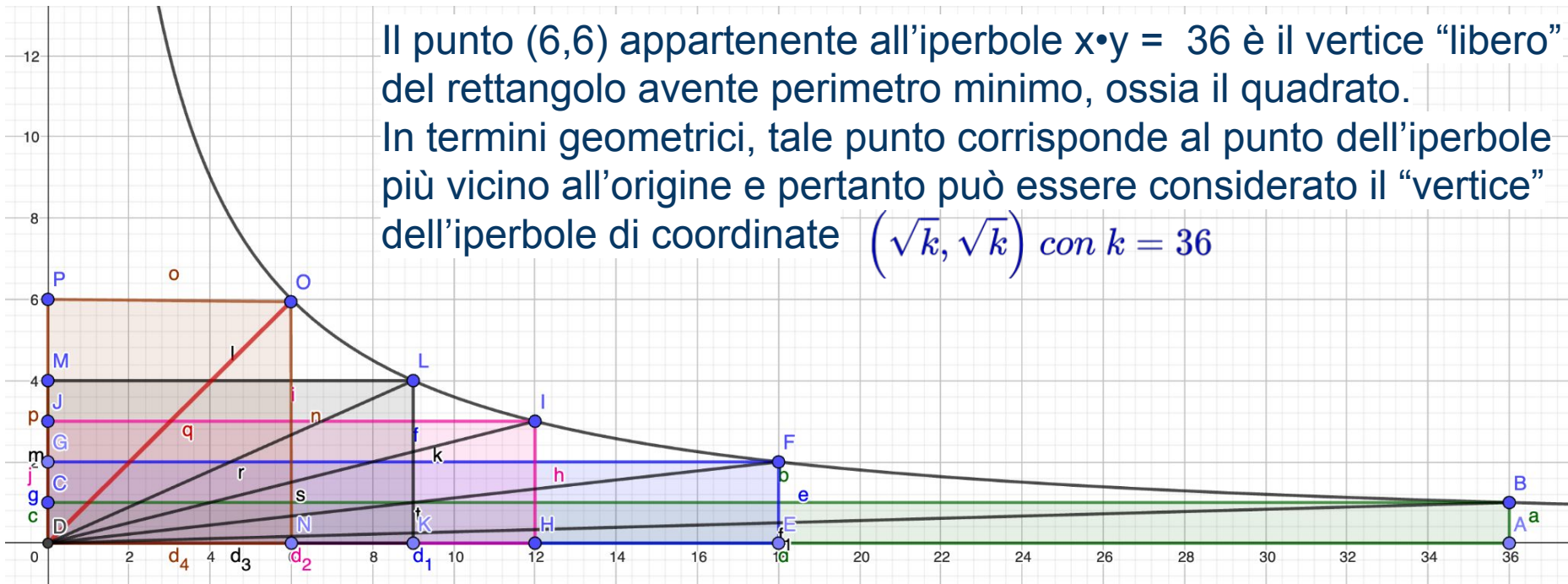


Minimizziamo il *perimetro*

Calcoliamo la derivata prima della funzione perimetro	$P'(x) = \frac{dP(x)}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2}$
Poniamo $P'(x)=0$ per trovare i punti stazionari:	$\begin{aligned}P'(x) = 0 &\implies 2 - \frac{72}{x^2} = 0 \implies \frac{72}{x^2} = 2 \\ &\implies x^2 = 36 \implies x = 6\end{aligned}$
Ricaviamo la y	$y = \frac{36}{x} = 6$
Concludendo $x = 6$ e $y = 6$ è un rettangolo con base e altezza uguali: è un quadrato . Si dimostra che il punto $x = 6$ e $y = 6$ è minimo della funzione $P(x)$ studiando naturalmente il segno della $P'(x)$	

Diagonale minima

Il punto $(6,6)$ appartenente all'iperbole $x \cdot y = 36$ è il vertice “libero” del rettangolo avente perimetro minimo, ossia il quadrato. In termini geometrici, tale punto corrisponde al punto dell'iperbole più vicino all'origine e pertanto può essere considerato il “vertice” dell'iperbole di coordinate $(\sqrt{k}, \sqrt{k})$ con $k = 36$



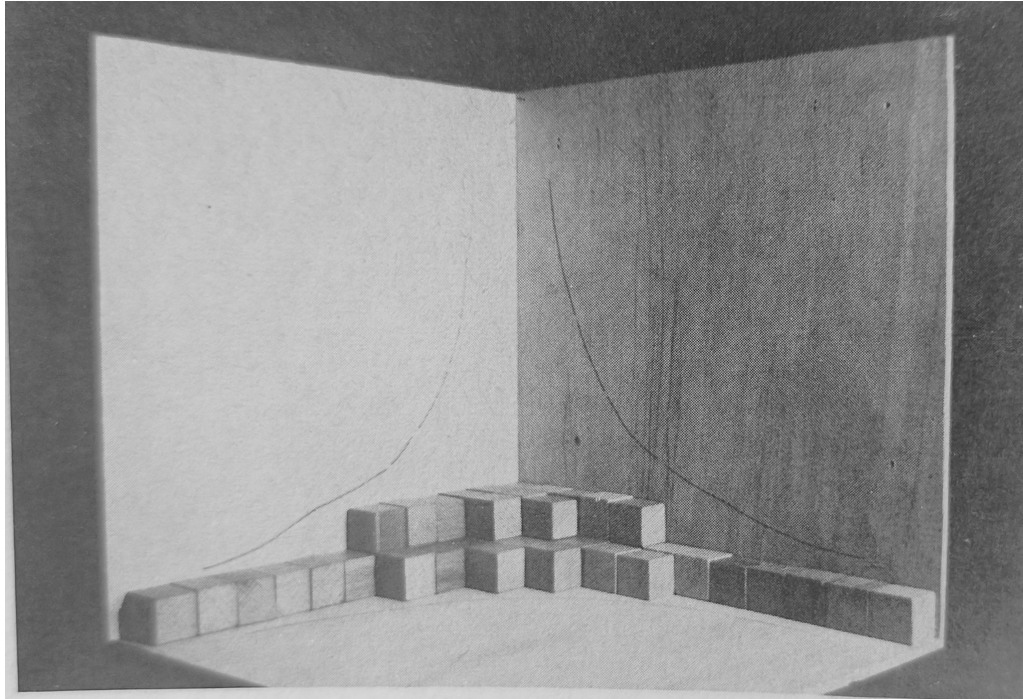
Il problema di ottimizzazione nello spazio

Tra tutti i parallelepipedi retti a base rettangolare di dimensioni x, y, z e volume V trovare quello di area totale minima e stabilire se ha anche la diagonale minima.

Utilizzando i cubetti a disposizione ($1 \text{ cubetto} = 1 \text{ u}^3$), “costruite” tanti parallelepipedi di volume $\mathcal{V} = 12 \text{ u}^3$ inserendoli in un ottante di un riferimento cartesiano ortogonale, in modo che un vertice coincida con l'origine e che tre lati si trovino sugli assi.

N.B. le coordinate dei vertici liberi corrispondono alle dimensioni dei parallelepipedi x, y, z e si trovano su una “curva” che ...

Il problema di ottimizzazione nello spazio



$$x \cdot y \cdot z = 12 u^3$$

Il problema di ottimizzazione nello spazio

- I vertici liberi a quota $z = 1$ si trovano su un'iperbole di equazione $x y = 12$
- I vertici liberi a quota $z = 2$ si trovano su un'iperbole di equazione $x y = 6$
- I vertici liberi a quota $z = 3$ si trovano su un'iperbole di equazione $x y = 4$
- I vertici liberi a quota $z = 4$ si trovano su un'iperbole di equazione $x y = 3$
- I vertici liberi a quota $z = 6$ si trovano su un'iperbole di equazione $x y = 2$
- I vertici liberi a quota $z = 12$ si trovano su un'iperbole di equazione $x y = 1$

Il problema si riduce (per ogni quota!) al problema analogo visto in precedenza sul piano. In questo caso, nello spazio, otteniamo una schiera di iperboli che sembra una grandinata di un Teatro.

Analogie nel piano e nello spazio

L'area tende al volume

$$A \longrightarrow V$$

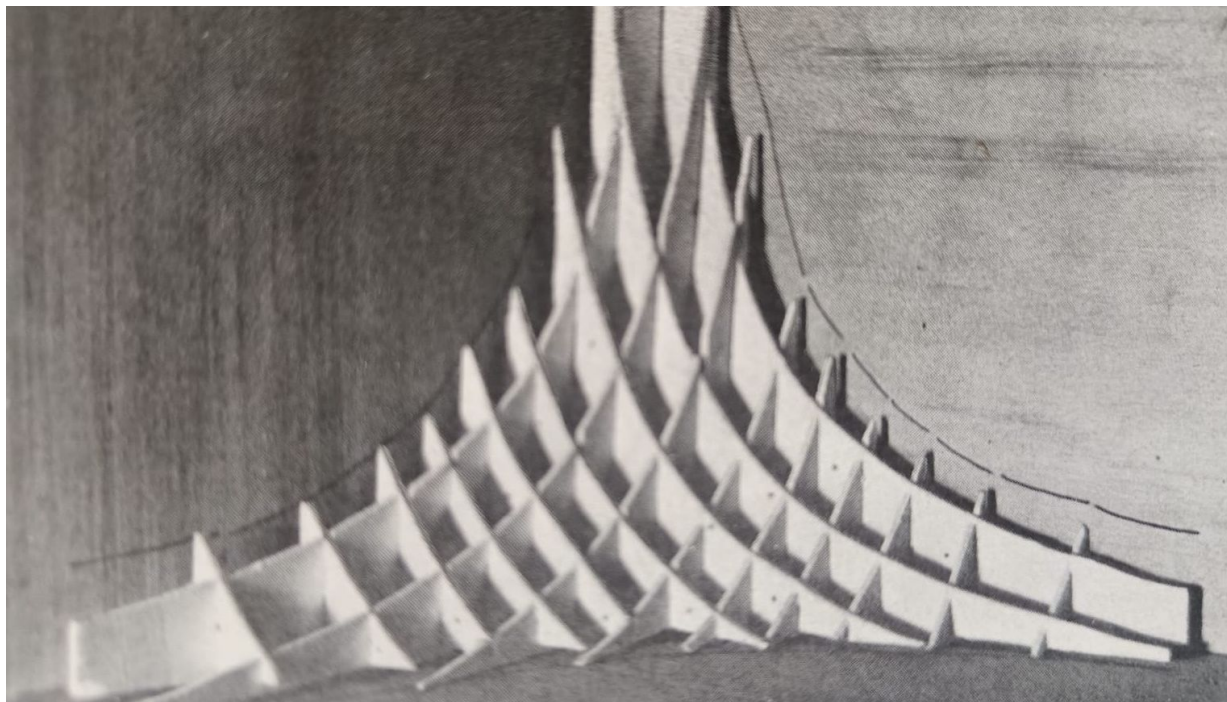
Il perimetro tende alla superficie totale

$$\rho \longrightarrow S_t$$

e come sul piano il quadrato è la figura piana che ha perimetro minimo tra i rettangoli equivalenti così nello spazio il cubo è il solido con superficie totale minima tra i paralleleogrammi di equal volume.

E... costruendo altre due le schiere di iperboli, tenendo fissa ora x ora y si ha una superficie, una superficie cubica.

Schiere di iperboli - Superficie cubica S: $x \cdot y \cdot z = k$



Superficie cubica S : $x \cdot y \cdot z = k$

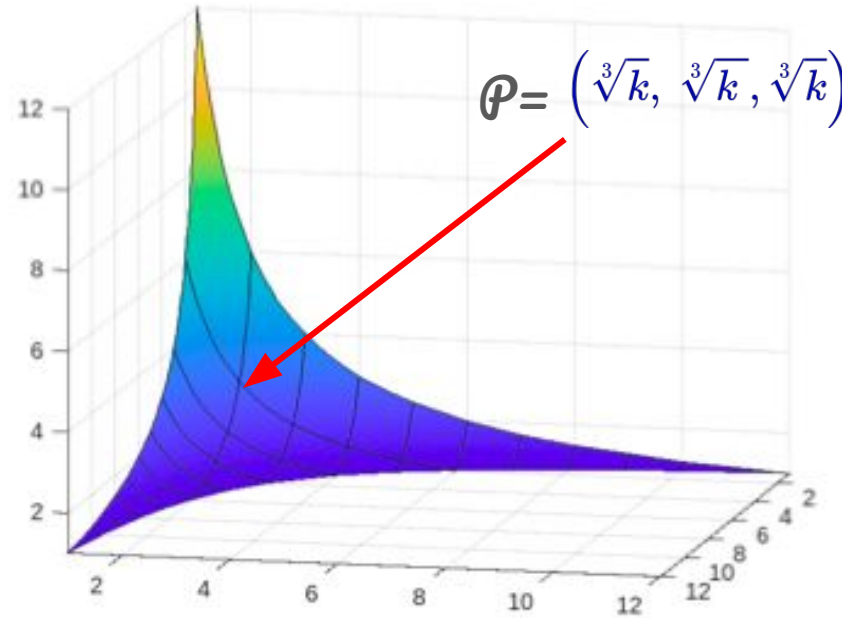
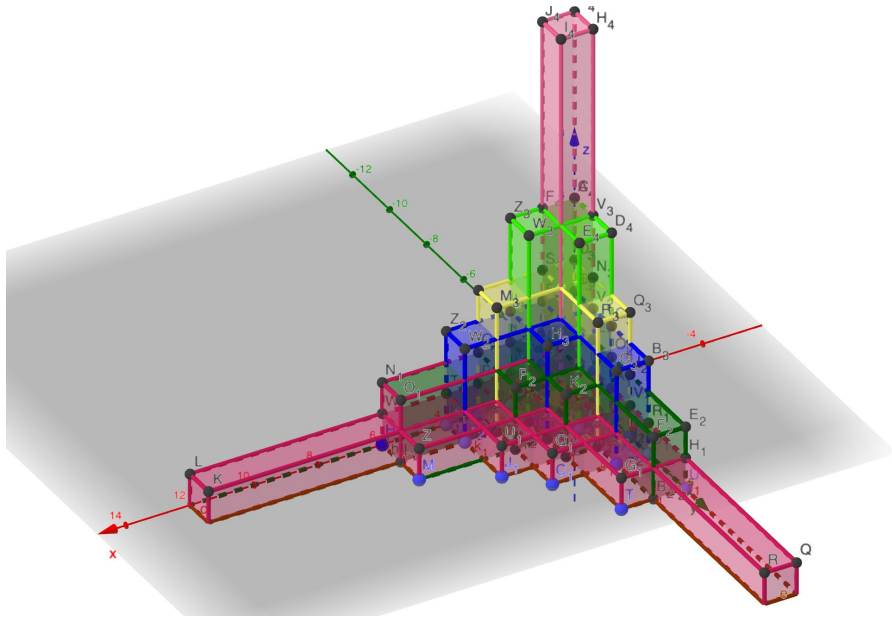
Una prima osservazione che può essere fatta su un particolare punto $P \in S$ di

$P \left(\sqrt[3]{k}, \sqrt[3]{k}, \sqrt[3]{k} \right)$ rappresenta, in analogia con il piano, il punto della superficie più vicino all'origine del sistema di riferimento.

Le coordinate del punto P sono il vertice libero del cubo di superficie totale minima.

Unendo con un segmento l'origine O del sistema di riferimento con il punto P otterremo la diagonale del cubo; diagonale che avrà la lunghezza minima tra tutte le diagonali degli infiniti parallelepipedi che si possono formare.

Superficie cubica S : $x \cdot y \cdot z = k$



e per concludere...

*“Sebbene queste siano scuole differenti - la scuola della prima infanzia, la scuola dell’infanzia, quella dell’adolescenza e quella della giovinezza - non vogliamo che vi si facciano apprendere cose differenti, ma le medesime cose in maniera differente. Intendo dire tutte le cose che possono rendere gli umani veramente uomini, gli scienziati veramente scienziati, apprese secondo l’età e il livello di preparazione anteriore che deve sempre tendere ad elevarsi ulteriormente e gradualmente” - da **Didattica Magna 1657***

Comenius - 1592-1670 e la scuola “per cicli”